Lösungen zur Klassenarbeit - Aussagenlogik und Beweisprinzipien

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (5 BE/Punkte)

a) Zeilen (A, B, C): www: w; wwf: f; wfw: f; wff: f; fww: w; fwf: f; ffw: w; fff: w. (3 P.)
b) $\neg S \equiv \neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow C) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C)$ (2 P.).
Für die Tafel trägt man zuerst die Spalten $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ ein; eine Implikation ist nur bei wahrer Prämisse und falscher Folgerung falsch. S ist genau in den vier Zeilen wahr, in denen beide Spalten wahr sind. Für die Negation nutzt man De Morgan und $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$. Kontrolle: $\neg S$ muss genau in den vier übrigen Zeilen wahr sein.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) (1) wahr: Zu jedem x wählt man $y = \sqrt[3]{x}$ (auch für negative x). (2) wahr: $y = 0$ erfüllt $0 \leq x^2$ für alle x. (2 P.)
b) (1) $\exists x\, \forall y:\ y^3 \neq x$. (2) $\forall y\, \exists x:\ y > x^2$. (2 P.)
Bei (1) darf y von x abhängen, weil der Existenzquantor hinter dem Allquantor steht; die dritte Wurzel existiert für jede reelle Zahl. Bei (2) muss ein einziges y für alle x passen, und $y = 0$ leistet das, ebenso jede negative Zahl. Beim Verneinen werden alle Quantoren getauscht und nur die innere Aussage negiert; die Reihenfolge der Variablen bleibt erhalten.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Ist n ungerade, so ist $n^2 - 1$ durch 8 teilbar. (1 P.)
b) $n = 2k + 1$: $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$; $k(k+1)$ ist gerade, also $8 \mid n^2 - 1$. $\square$ (3 P.)
Die Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$ ist logisch gleichwertig zur ursprünglichen Aussage und hier leichter zu beweisen, weil man mit der Darstellung $n = 2k + 1$ rechnen kann. Von den zwei aufeinanderfolgenden Zahlen k und $k + 1$ ist stets eine gerade, deshalb steckt in $4k(k+1)$ der Faktor 8. Probe: $n = 5$ liefert 24, $n = 7$ liefert 48.

Lösung zu Aufgabe 4 (3 BE/Punkte)

a) $B = w$ und $K \vee G$ wahr: 3 Belegungen (K, G = ww, wf, fw). (1 P.)
b) $\neg Z \equiv \neg B \vee (\neg K \wedge \neg G)$: „Belehrung fehlt, oder weder Kittel noch Genehmigung.“ (1 P.)
c) $B = w$, $K \vee G = f$: $Z = f$, kein Einlass. (1 P.)
Für a) zählt man die Belegungen von K und G, die bei $B = w$ die Klammer wahr machen; nur „beide falsch“ scheidet aus. In b) wird die Konjunktion nach De Morgan zur Disjunktion, die innere Disjunktion zur Konjunktion. In c) liegt genau der Fall vor, in

dem die Belehrung zwar absolviert ist, aber weder Kittel noch Genehmigung vorhanden sind; die Tür bleibt zu.

Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

a) $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ sind irrational, ihre Summe 0 ist rational. (2 P.)

b) Angenommen $\sqrt{2}+1=r$ wäre rational. Dann ist $\sqrt{2}=r-1$ rational – Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{2}$. □ (2 P.)

Ein einziges Gegenbeispiel genügt, um eine Allaussage zu widerlegen; Beispiele, die die Aussage bestätigen, beweisen dagegen nichts. Im Widerspruchsbeweis nutzt man, dass die rationalen Zahlen bei Subtraktion abgeschlossen sind: Mit r und 1 ist auch $r-1$ rational. Voller Punktwert nur, wenn die Annahme ausdrücklich formuliert und der Widerspruch klar benannt wird.