Lernzettel - Aussagenlogik und Beweisprinzipien

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Die Prüfungsordnung als logisches Rätsel

In der Prüfungsordnung Ihres Studiengangs steht: „Wer die Klausur besteht und mindestens 50 Prozent der Übungspunkte hat, erhält die Zulassung zur mündlichen Prüfung.“ Ihre Kommilitonin hat die Zulassung nicht bekommen. Was können Sie daraus sicher schließen: dass sie die Klausur nicht bestanden hat, dass sie zu wenige Übungspunkte hat, oder nur, dass mindestens eines von beidem zutrifft? Genau solche Fragen beantwortet die Aussagenlogik. Sie ist die Grammatik der mathematischen Sprache: Wer sie beherrscht, liest Sätze der Analysis und der linearen Algebra genau und kann eigene Beweise sauber aufschreiben.

Aussagen und Verknüpfungen

Definition: Aussagen und Verknüpfungen

Die Mathematik an der Universität ist eine Sprache, in der jede Behauptung präzise gefasst und bewiesen wird. Grundbaustein ist die **Aussage**: ein Satz, dem genau einer der beiden Wahrheitswerte *wahr* (w) oder *falsch* (f) zugeordnet werden kann. „7 ist eine Primzahl“ ist eine wahre Aussage, „Jede gerade Zahl ist durch 4 teilbar“ ist eine falsche Aussage, „Wie spät ist es?“ ist keine Aussage. Aus Aussagen A, B bildet man neue Aussagen: die **Negation** $\neg A$ („nicht A“), die **Konjunktion** $A \wedge B$ („A und B“), die **Disjunktion** $A \vee B$ („A oder B“, einschließendes Oder), die **Implikation** $A \Rightarrow B$ („aus A folgt B“) und die **Äquivalenz** $A \Leftrightarrow B$ („A genau dann, wenn B“).

Merke

Die Wahrheitswerte legt man durch **Wahrheitstafeln** fest. Besonders wichtig ist die Implikation: $A \Rightarrow B$ ist nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist. Aus einer falschen Voraussetzung folgt also jede Aussage („ex falso quodlibet“). Es gilt $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$. Man nennt A *hinreichend* für B und B *notwendig* für A.

Gesetze der Aussagenlogik

Definition: Gesetze der Aussagenlogik

Zwei zusammengesetzte Aussagen sind **äquivalent**, wenn sie in jeder Zeile der Wahrheitstafel denselben Wert haben. Eine **Tautologie** ist immer wahr. Die wichtigsten Äquivalenzen:

Merke

- **De Morgan:** $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$.

Merke

2. **Kontraposition:** $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$. Die *Umkehrung* $B \Rightarrow A$ ist dagegen im Allgemeinen nicht äquivalent.

Merke

3. **Doppelte Negation:** $\neg\neg A \equiv A$.

Merke

4. **Negation der Implikation:** $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$.

Merke

5. **Äquivalenz:** $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Quantoren

Definition: Quantoren

Aussageformen $P(x)$ werden durch Quantoren zu Aussagen: $\forall x \in M : P(x)$ („für alle x aus M gilt $P(x)$“) und $\exists x \in M : P(x)$ („es gibt ein x aus M mit $P(x)$“). Die Negation vertauscht die Quantoren: $\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$ und $\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$. Die **Reihenfolge** gemischter Quantoren ist wesentlich: $\forall x\, \exists y : y > x$ ist wahr (wähle $y = x + 1$), $\exists y\, \forall x : y > x$ ist falsch. Genau solche Wechsel prägen später die Epsilon-Delta-Definitionen der Analysis.

Beweisprinzipien

Definition: Beweisprinzipien

Direkter Beweis: Man startet bei der Voraussetzung A und folgert in Schritten B. **Kontraposition:** Statt $A \Rightarrow B$ beweist man $\neg B \Rightarrow \neg A$. **Widerspruchsbeweis:** Man nimmt $\neg B$ zusätzlich zu A an und leitet einen Widerspruch her; daraus folgt B. **Gegenbeispiel:** Eine Allaussage $\forall x\, P(x)$ widerlegt man durch ein einziges x mit $\neg P(x)$.

So gehst du vor: Beweis wählen

1. Voraussetzung und Behauptung getrennt aufschreiben.
2. Direkter Weg versuchen: von der Voraussetzung zur Behauptung rechnen.
3. Klappt das nicht: Kontraposition ($\neg B \Rightarrow \neg A$) oder Widerspruch (Gegenteil annehmen).
4. Bei Allaussagen ein Gegenbeispiel suchen, falls die Aussage falsch sein könnte.
5. Beweis mit $\square$ abschließen.

Beispiel 1 (direkt)

Satz: Sind m, n ungerade, so ist $m+n$ gerade. Beweis: Es gibt $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $m = 2a+1$, $n = 2b+1$. Dann $m+n = 2(a+b+1)$, also gerade. $\square$

Beispiel 2 (Kontraposition)

Satz: Ist n^2 ungerade, so ist n ungerade. Kontraposition: Ist n gerade, so ist n^2 gerade. Mit $n = 2k$ gilt $n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$. $\square$

Beispiel 3 (Widerspruch)

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational. Angenommen $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden $p, q \in \mathbb{N}$. Dann $p^2 = 2q^2$, also ist p^2 gerade, somit p gerade, $p = 2r$. Es folgt $4r^2 = 2q^2$, also $q^2 = 2r^2$ und q gerade. Dann sind p, q beide gerade, im Widerspruch zur Teilerfremdheit. $\square$

Beispiel 4 (Negation mit Quantoren)

Die Aussage „Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle x mit $|x-a|$ gilt $|f(x)-f(a)|$“ (Stetigkeit in a) wird negiert zu: „Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass für jedes $\delta > 0$ ein x mit $|x-a|$ und $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$ existiert.“ Jeder Quantor wird vertauscht, nur die letzte Bedingung wird negiert.

Beispiel 5 (Gegenbeispiel)

Die Behauptung „Aus $a^2 = b^2$ folgt $a = b$“ ist falsch: Für $a = 1$, $b = -1$ gilt $a^2 = b^2$, aber $a \neq b$. Richtig ist $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ oder $a = -b$.

Wahrheitstafeln systematisch aufstellen

Eine Wahrheitstafel ist das wichtigste Werkzeug, um zu entscheiden, ob zwei zusammengesetzte Aussagen äquivalent sind oder ob eine Aussage eine Tautologie ist. Bei n Teilaussagen hat die Tafel genau 2^n Zeilen, denn jede Teilaussage kann wahr oder falsch sein. Für drei Aussagen A, B, C sind es also acht Zeilen. Damit keine Zeile vergessen wird, schreibt man die

Belegungen immer in derselben Reihenfolge auf: in der ersten Spalte vier Mal w und vier Mal f, in der zweiten Spalte abwechselnd zwei Mal w und zwei Mal f, in der dritten Spalte abwechselnd w und f.

So gehst du vor: Wahrheitstafel für eine zusammengesetzte Aussage

1. Alle Teilaussagen $A, B, C, \ldots$ als Spaltenköpfe notieren und alle 2^n Belegungen eintragen.
2. Die Aussage in Teilschritte zerlegen, die innersten Klammern zuerst: pro Teilschritt eine eigene Spalte.
3. Spalte für Spalte nach den Grundtafeln von $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ ausfüllen.
4. Letzte Spalte lesen: Nur w bedeutet Tautologie, nur f bedeutet Widerspruch, sonst ist die Aussage erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

Beispiel 6 (Transitivität der Implikation)

Zeigen Sie, dass $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ eine Tautologie ist.

Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist nur in den Zeilen falsch, in denen A wahr und B falsch ist. Die Gesamtaussage könnte nur falsch sein, wenn A wahr und C falsch ist und gleichzeitig die Prämisse wahr ist. Aus A wahr und $A \Rightarrow B$ wahr müsste dann B wahr folgen, und aus B wahr und $B \Rightarrow C$ wahr müsste C wahr folgen – im Widerspruch zu C falsch. Also gibt es keine falsche Zeile: Die Aussage ist eine Tautologie, die Implikation ist transitiv. Ketten wie „Regen $\Rightarrow$ nasse Straße $\Rightarrow$ Rutschgefahr“ dürfen daher verkürzt werden.

Notwendig, hinreichend und die Sprache der Sätze

Mathematische Sätze haben fast immer die Form „Wenn A, dann B“. Die Umgangssprache kennt viele Varianten, die alle dieselbe Implikation $A \Rightarrow B$ meinen: „aus A folgt B“, „A ist hinreichend für B“, „B ist notwendig für A“, „A gilt nur dann, wenn B gilt“, „B gilt, falls A gilt“. Die Verwechslung von „notwendig“ und „hinreichend“ gehört zu den häufigsten Fehlern im ersten Semester. Ein Beispiel aus der Analysis: Differenzierbarkeit ist *hinreichend* für Stetigkeit, aber nicht notwendig; Stetigkeit ist *notwendig* für Differenzierbarkeit, aber nicht hinreichend, wie die Betragsfunktion in 0 zeigt. Ein Beispiel aus dem Studienalltag: Die Teilnahme an der Klausur ist notwendig für das Bestehen, aber nicht hinreichend.

Regel: Äquivalenz zeigen heißt zwei Richtungen zeigen

Ein Satz der Form „A genau dann, wenn B“ besteht aus zwei Beweisen: „$\Rightarrow$“ (Voraussetzung A, Behauptung B) und „$\Leftarrow$“ (Voraussetzung B, Behauptung A). Beide Richtungen müssen ausdrücklich aufgeschrieben werden. Nur wenn jeder Schritt umkehrbar ist, darf man eine Kette von Äquivalenzumformungen $\Leftrightarrow$ schreiben – andernfalls zeigt die Kette nur eine

Richtung.

Weitere Beweistechniken

Fallunterscheidung. Lässt sich die Menge aller zu betrachtenden Objekte in endlich viele Fälle zerlegen, die alle Möglichkeiten abdecken, genügt es, jeden Fall einzeln zu beweisen. Typisch ist die Zerlegung der ganzen Zahlen nach den Resten bei Division durch eine feste Zahl: Jede ganze Zahl hat die Form $2k$ oder $2k+1$, bei Division durch 3 die Form $3k$, $3k+1$ oder $3k+2$. **Eindeutigkeitsbeweis.** Um zu zeigen, dass es höchstens ein Objekt mit einer Eigenschaft gibt, nimmt man zwei Objekte x, y mit dieser Eigenschaft an und beweist $x = y$. So wird zum Beispiel gezeigt, dass das neutrale Element einer Gruppe eindeutig ist. **Existenzbeweis.** Eine Aussage „$\exists x : P(x)$“ beweist man durch Angabe eines Beispiels (konstruktiv) oder indirekt durch einen Widerspruch zur Annahme „$\forall x : \neg P(x)$“. Ein **Gegenbeispiel** dient dagegen nur zum Widerlegen von Allaussagen.

Beispiel 7 (Fallunterscheidung)

Zeigen Sie: Für jede ganze Zahl n ist $n^2 + n$ gerade.

Fall 1: $n = 2k$. Dann $n^2 + n = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$, gerade. Fall 2: $n = 2k + 1$. Dann $n^2 + n = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 = 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1)$, gerade. Da jede ganze Zahl in einen der beiden Fälle fällt, ist die Behauptung bewiesen. □

Beispiel 8 (Existenz durch Widerspruch)

Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Angenommen, es gäbe nur die Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$. Betrachten Sie $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$. Jede der Primzahlen p_i lässt bei Division von N den Rest 1, teilt N also nicht. Jede Zahl $N > 1$ besitzt aber einen Primteiler. Dieser wäre eine Primzahl außerhalb der Liste – Widerspruch zur Annahme. □

Wie schreibt man einen Beweis auf?

Ein Beweis ist ein Text für Leserinnen und Leser, keine Rechnung auf einem Schmierzettel. Er beginnt mit der Voraussetzung („Seien m, n ungerade ganze Zahlen“) und einer Ankündigung der Beweisart („Wir zeigen die Kontraposition“). Jeder Schritt wird begründet („nach Definition“, „nach der binomischen Formel“, „nach Induktionsvoraussetzung“). Am Ende steht die Behauptung, markiert mit □ oder „q. e. d.“. Hilfreich sind feste Formulierungen: „Es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit …“, „Sei x beliebig, aber fest“, „Ohne Einschränkung sei …“. Rechnen Sie nie rückwärts von der Behauptung aus und schließen dann „also stimmt es“, wenn die Schritte nicht umkehrbar

sind: Aus $1 = 2$ folgt durch Multiplikation mit 0 die wahre Aussage $0 = 0$, aber das beweist natürlich nichts.

Beispiel 9 (Negation einer Folgenaussage)

Negieren Sie: „Die Folge (a_n) ist beschränkt."

Formal: $\exists M > 0\, \forall n \in \mathbb{N} :\ |a_n| \leq M$. Die Negation lautet: $\forall M > 0\, \exists n \in \mathbb{N} :\ |a_n| > M$. In Worten: Jede Schranke wird von mindestens einem Folgenglied übertroffen. Für $a_n = n$ stimmt das: Zu jedem M wählt man $n > M$.

Quantorenaussagen lesen und schreiben lernen

Quantorenaussagen sind lange Sätze in kompakter Zeichensprache. Lesen Sie sie von links nach rechts als Spiel zwischen zwei Personen: Wer „für alle" sagt, überlässt dem Gegner die Wahl, wer „es gibt" sagt, darf selbst wählen. Bei $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$ wählt der Gegner zuerst ein beliebig kleines ε, Sie müssen darauf mit einem passenden δ antworten. Deshalb darf δ von ε abhängen, nicht aber umgekehrt. Vertauschen Sie die Quantoren, ändert sich der Sinn: „Zu jeder Person gibt es einen Lieblingsfilm" ist harmlos, „es gibt einen Film, der für alle der Lieblingsfilm ist" dagegen eine starke Behauptung.

So gehst du vor: Eine Quantorenaussage verneinen

1. Aussage vollständig mit allen Quantoren und Bedingungen hinschreiben.
2. Von links nach rechts jeden Quantor vertauschen: $\forall$ wird $\exists$, $\exists$ wird $\forall$.
3. Die Aussage hinter dem letzten Quantor verneinen (De Morgan, Negation der Implikation).
4. Zur Kontrolle ein Beispiel einsetzen: Die Negation muss genau dort wahr sein, wo das Original falsch ist.

Achtung: Typische Fehler beim Verneinen

Die Verneinung von „alle Studierenden bestehen" ist nicht „kein Studierender besteht", sondern „mindestens ein Studierender besteht nicht". Ebenso ist die Verneinung von „$x > 2$ oder x" nicht „x oder $x > -2$", sondern „$-2 \leq x \leq 2$": Aus „oder" wird „und", und die Ungleichungen drehen sich um.

Beispiel 10 (Eindeutigkeit)

Zeigen Sie: Eine reelle Zahl e mit $e + x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt.

Seien e und e' zwei solche Zahlen. Setzt man in der Eigenschaft von e den Wert $x = e'$ ein, folgt $e + e' = e'$. Setzt man in der Eigenschaft von e' den Wert $x = e$ ein, folgt $e' + e = e$. Wegen der Kommutativität der Addition ist

$e + e' = e' + e$, also $e' = e$. Damit gibt es höchstens eine solche Zahl, und es ist natürlich $e = 0$. $\square$

Beweise in der Klausur: ein Fahrplan

In Klausuren des ersten Semesters kommen immer wieder dieselben Aufgabentypen vor: eine Aussage negieren, eine Wahrheitstafel aufstellen, eine Behauptung durch Gegenbeispiel widerlegen und einen kurzen Beweis führen. Für den Beweis lohnt sich ein fester Ablauf. Erstens: Voraussetzung und Behauptung getrennt notieren. Zweitens: Alle Definitionen der vorkommenden Begriffe hinschreiben, denn die meisten Beweise im ersten Semester sind nichts anderes als das Einsetzen von Definitionen. Drittens: Bei Teilbarkeit und Parität mit $2k$ und $2k + 1$ rechnen. Viertens: Bei Aussagen mit „es gibt kein“ oder „ist irrational“ den Widerspruch versuchen. Fünftens: Zum Schluss ausdrücklich festhalten, dass die Behauptung bewiesen ist. Wer diese Schritte einübt, gewinnt Sicherheit und verliert keine Punkte durch Lücken in der Begründung.

Wusstest du? Von Aristoteles bis zum Computer

Schon Aristoteles (4. Jahrhundert vor Christus) ordnete gültige Schlussweisen in Regeln, die Syllogismen. Die heutige Aussagenlogik geht auf George Boole zurück, der 1854 Logik wie Algebra behandelte. Claude Shannon erkannte 1937, dass sich Boolesche Ausdrücke mit Schaltern und Relais aufbauen lassen – die Grundlage jedes Prozessors: Jedes Logikgatter im Computer realisiert eine der Verknüpfungen $\neg, \wedge, \vee$. Euklid führte um 300 vor Christus den Widerspruchsbeweis für die Unendlichkeit der Primzahlen. Kurt Gödel zeigte 1931 schließlich, dass in jedem hinreichend starken Axiomensystem wahre Aussagen existieren, die sich darin nicht beweisen lassen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Eine Aussage ist ein Satz, der eindeutig wahr oder falsch ist; Verknüpfungen sind $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, und eine Wahrheitstafel mit 2^n Zeilen entscheidet über Äquivalenz oder Tautologie.
- Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist nur falsch, wenn A wahr und B falsch ist; sie ist äquivalent zu $\neg A \vee B$ und zur Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$, nicht aber zur Umkehrung.
- „Hinreichend“ steht an der Spitze des Pfeils, „notwendig“ am Ende: A hinreichend für B heißt $A \Rightarrow B$; eine Äquivalenz braucht immer beide Richtungen.
- De Morgan: $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ und $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$; die Negation einer Implikation ist $A \wedge \neg B$.
- Quantoren werden bei der Negation vertauscht ($\neg\forall \equiv \exists\neg$, $\neg\exists \equiv \forall\neg$); die Reihenfolge verschiedener Quantoren ist wesentlich.
- Beweisprinzipien: direkter Beweis, Kontraposition, Widerspruch,

Fallunterscheidung, Eindeutigkeits- und Existenzbeweis; ein Gegenbeispiel widerlegt eine Allaussage, ein Beispiel beweist sie nie.
- Ein Beweis ist ein begründeter Text: Voraussetzung, Beweisart, begründete Schritte, Behauptung, Schlusszeichen □.

Achtung

Verwechseln Sie nie Implikation und Umkehrung. Aus „Wenn es regnet, ist die Straße nass“ folgt nicht „Wenn die Straße nass ist, regnet es“. Ein Beispiel ist kein Beweis für eine Allaussage. Beim Negieren von Aussagen mit „und/oder“ und Quantoren immer die Regeln von De Morgan anwenden.

Ottos Tipp

Schreiben Sie vor jedem Beweis auf, was Voraussetzung und was Behauptung ist, und wählen Sie erst dann die Beweismethode. Taucht in der Behauptung „es gibt kein“ oder „irrational“ auf, hilft meist ein Widerspruchsbeweis.