Lösungen zur Klassenarbeit - Wachstumsmodelle und Differenzialgleichungen

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Für den Nachweis der Differenzialgleichung wird N abgeleitet und mit $0{,}08N$ verglichen (zwei BE). Die Verdopplungszeit erhält man aus $\mathrm{e}^{0{,}08t} = 2$ durch Logarithmieren (zwei BE). Der Bestand nach zehn Jahren ergibt sich durch Einsetzen und wird sinnvoll gerundet (eine BE).

a) $N'(t) = 500 \cdot 0{,}08\,\mathrm{e}^{0{,}08t} = 0{,}08N(t)$: Beide Seiten stimmen überein. (2 BE)

b) $\mathrm{e}^{0{,}08t} = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0{,}08} \approx 8{,}66$ Jahre. (2 BE)

c) $N(10) = 500\,\mathrm{e}^{0{,}8} \approx 1113$. (1 BE)

Lösung zu Aufgabe 2 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Temperatur nach zehn Minuten erhält man durch Einsetzen (eine BE). Für den Zeitpunkt von $40\,^\circ\mathrm{C}$ wird der Exponentialterm isoliert und logarithmiert (zwei BE). Die Differenzialgleichung des beschränkten Abnehmens wird angegeben und die Konstante als relative Abnahme des Temperaturunterschieds pro Minute gedeutet (zwei BE).

a) $T(10) = 21 + 74\,\mathrm{e}^{-0{,}8} \approx 54{,}3\,^\circ\mathrm{C}$. (1 BE)

b) $74\,\mathrm{e}^{-0{,}08t} = 19 \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{74}{19}}{0{,}08} \approx 17{,}0$ Minuten. (2 BE)

c) $T' = -0{,}08(T - 21)$: Pro Minute verringert sich der Temperaturunterschied zum Raum um etwa $8\,\%$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Man berechnet die Ableitung von g mit der Kettenregel und setzt g in die rechte Seite der Differenzialgleichung ein. Stimmen beide Terme für alle t überein, ist g eine Lösung (drei BE). Die Schranke ist der Grenzwert von g für $t \to \infty$ bzw. die Zahl in der Klammer (eine BE).

a) $g'(t) = 1{,}4\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$; $0{,}2(10 - g) = 0{,}2 \cdot 7\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 1{,}4\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ ✓. (3 BE)

b) $G = 10$. (1 BE)

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Den Anfangswert erhält man durch Einsetzen von $t = 0$ (eine BE). Die stärkste Zunahme liegt beim logistischen Wachstum bei der halben Schranke; man setzt die Funktion gleich 50, isoliert den Exponentialterm und

logarithmiert (drei BE). Ein Antwortsatz nennt den Zeitpunkt. Zwischenschritt: $\frac{100}{1+9\mathrm{e}^{-0{,}5t}} = 50 \Rightarrow 9\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 1 \Rightarrow t = 2\ln 9 \approx 4{,}39$. Kontrolle: Dort ist $f' = 0{,}005 \cdot 50 \cdot 50 = 12{,}5$ maximal.

a) $f(0) = 10$. (1 BE)
b) Bei $f = 50$: $9\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 1 \Rightarrow t = 2\ln 9 \approx 4{,}39$. (3 BE)

Lösung zu Aufgabe 5 (2 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Exponentielles Wachstum würde ohne Grenze immer schneller zunehmen. Reale Bestände werden aber durch Nahrung, Platz oder Sättigung des Marktes begrenzt. Deshalb sind beschränkte oder logistische Modelle mit einer Sättigungsgrenze langfristig realistischer. Für die Begründung und das bessere Modell gibt es je eine Bewertungseinheit.

Exponentielles Wachstum würde unbegrenzt zunehmen; Ressourcen wie Nahrung oder Platz sind aber begrenzt. Besser sind beschränktes oder logistisches Wachstum mit einer Sättigungsgrenze. (2 BE)