Lernzettel - Wachstumsmodelle und Differenzialgleichungen

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Einstieg: Wie verbreitet sich eine neue App?

An einem Gymnasium in Mainz mit $1\,200$ Schülerinnen und Schülern wird eine neue Lern-App vorgestellt. Am ersten Tag installieren sie nur zwölf Neugierige, doch jeder Nutzer erzählt Freunden davon. Zunächst wächst die Zahl der Nutzer fast exponentiell: je mehr Nutzer, desto mehr neue. Irgendwann haben aber fast alle die App, und es gibt kaum noch jemanden, der neu überzeugt werden kann. Die Kurve flacht ab und nähert sich $1\,200$.

Um solche Vorgänge zu beschreiben, fragt man nicht zuerst nach dem Bestand, sondern nach seiner Änderung: Wovon hängt ab, wie schnell der Bestand wächst? Die Antwort ist eine Gleichung zwischen Funktion und Ableitung, eine Differenzialgleichung. In diesem Kapitel lernen Sie die drei wichtigsten Wachstumsmodelle kennen, prüfen Lösungen von Differenzialgleichungen und bestimmen Parameter aus Messdaten.

Modellieren mit Änderungsraten

Definition: Änderungsrate

Viele Prozesse werden nicht direkt durch eine Funktion, sondern durch eine Aussage über ihre **Änderungsrate** beschrieben: „Der Bestand wächst jede Stunde um 4 % seines aktuellen Werts“ oder „die Temperatur nähert sich der Raumtemperatur umso schneller, je größer der Unterschied ist“. Solche Aussagen führen auf eine **Differenzialgleichung** (kurz DGL), eine Gleichung, in der eine gesuchte Funktion f und ihre Ableitung f' vorkommen. Eine Funktion ist Lösung der DGL, wenn sie die Gleichung für alle t erfüllt. Im Abitur müssen Sie meist nicht selbst lösen, sondern eine angegebene Lösung durch **Einsetzen nachprüfen** und im Sachzusammenhang interpretieren.

Exponentielles Wachstum und Zerfall

Definition: Probe

Ist die Änderungsrate proportional zum Bestand, gilt $f'(t) = k\,f(t)$. Lösungen sind $f(t) = C\,\mathrm{e}^{kt}$; mit dem Anfangsbestand $f(0) = f_0$ ist $C = f_0$. Für $k > 0$ wächst der Bestand, für k nimmt er ab (Zerfall). **Probe:** $f'(t) = C\,k\,\mathrm{e}^{kt} = k\,f(t)$. Die Verdopplungszeit ist $T_2 = \frac{\ln 2}{k}$, die Halbwertszeit $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{|k|}$; beide sind unabhängig vom Anfangsbestand. Exponentielles Wachstum ist nur kurze Zeit realistisch, da

Ressourcen begrenzt sind.

Beispiel 1

Ein Bestand von 1000 Bakterien verdoppelt sich in 3 Stunden. Aus $\mathrm{e}^{3k} = 2$ folgt $k = \frac{\ln 2}{3} \approx 0{,}231$. Nach 10 Stunden: $1000 \cdot 2^{10/3} \approx 10079$.

Satz: Exponentielles Wachstum

Die Differenzialgleichung $y' = k\,y$ mit $y(0) = y_0$ hat die Lösung $y(t) = y_0\,\mathrm{e}^{kt}$. Für $k > 0$ wächst y, für k zerfällt y.

Beschränktes Wachstum

Definition: Probe

Nähert sich der Bestand einer Schranke G, ist die Änderungsrate proportional zum *Abstand* zur Grenze: $f'(t) = k\,(G - f(t))$ mit $k > 0$. Die Lösung lautet $f(t) = G - (G - f_0)\mathrm{e}^{-kt}$. Der Graph steigt (für f_0) zunächst steil und flacht dann ab; die Gerade $y = G$ ist waagerechte Asymptote. **Probe:** $f'(t) = (G - f_0)k\,\mathrm{e}^{-kt} = k\,(G - f(t))$. Typische Beispiele sind das Abkühlen eines Getränks, das Aufladen eines Kondensators und das Lernen eines Wortschatzes.

Beispiel 2: Abkühlung

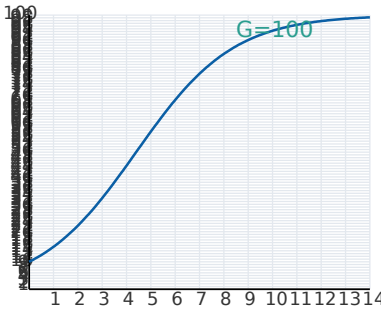
Kaffee mit 90 °C in einem 20 °C warmen Raum: $T'(t) = -0{,}1\,(T(t) - 20)$, $T(0) = 90$. Lösung: $T(t) = 20 + 70\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$. Nach 10 Minuten: $T(10) = 20 + 70\mathrm{e}^{-1} \approx 45{,}8$ °C. Wann sind 30 °C erreicht? $70\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 10 \Rightarrow t = 10\ln 7 \approx 19{,}5$ Minuten.

Satz: Beschränktes Wachstum

Die Differenzialgleichung $y' = k\,(S - y)$ mit $y(0) = y_0$ hat die Lösung $y(t) = S - (S - y_0)\,\mathrm{e}^{-kt}$; die Schranke S ist Grenzwert für $t \to \infty$.

Logistisches Wachstum

Realistische Populationen wachsen zunächst fast exponentiell, dann verlangsamt sich das Wachstum, und der Bestand nähert sich der Kapazitätsgrenze G. Die DGL lautet $f'(t) = \frac{k}{G}\,f(t)\,\big(G - f(t)\big)$. Die Lösung ist $f(t) = \dfrac{G}{1 + \left(\frac{G}{f_0} - 1\right)\mathrm{e}^{-kt}}$. Der Graph ist eine S-förmige Kurve. Die Wachstumsgeschwindigkeit f' ist maximal, wenn $f = \frac{G}{2}$ gilt, denn $f(G - f)$ ist ein Parabelterm mit Scheitel bei $\frac{G}{2}$. Dort liegt der Wendepunkt des Graphen.



Beispiel 3

$f(t) = \frac{100}{1+9\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$. Es gilt $f(0) = 10$ und $\lim_{t\to\infty} f(t) = 100$. Halber Grenzwert 50: $9\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 1 \Rightarrow t = 2\ln 9 \approx 4{,}39$. Dort ist die Zunahme am größten: $f' = \frac{0{,}5}{100} \cdot 50 \cdot 50 = 12{,}5$ pro Zeiteinheit.

Satz: Logistisches Wachstum

Die Differenzialgleichung $y' = k\,y\,(S - y)$ hat die Lösung $y(t) = \dfrac{S}{1 + a\,\mathrm{e}^{-kSt}}$ mit $a = \dfrac{S - y_0}{y_0}$. Die Wachstumsgeschwindigkeit ist bei $y = \frac{S}{2}$ am größten.

Anfangswertproblem und Probe

Ein Anfangswertproblem besteht aus einer DGL und einem Anfangswert, zum Beispiel $y' = 2y$, $y(0) = 3$. Die allgemeine Lösung ist $y = C\mathrm{e}^{2x}$; aus $y(0) = C = 3$ folgt $y = 3\mathrm{e}^{2x}$. Zum Nachweis, dass eine gegebene Funktion eine DGL löst, setzt man f und f' ein und vereinfacht, bis beide Seiten gleich sind. Vergessen Sie nicht zu prüfen, ob auch der Anfangswert stimmt.

So gehst du vor: Anfangswertproblem lösen

1. Passendes Modell wählen: $y' = ky$, $y' = k(S - y)$ oder $y' = ky(S - y)$.
2. Lösungsansatz aufstellen und y_0 aus dem Anfangswert einsetzen.
3. Parameter k mit einem zweiten gegebenen Wert bestimmen.
4. Probe: y ableiten und in die Differenzialgleichung einsetzen.

Gleichgewicht und Grenzwert

Definition: Gleichgewichtslösungen

Konstante Lösungen heißen **Gleichgewichtslösungen**: Dort ist $f' = 0$. Bei $f' = k(G - f)$ ist $f = G$ das (stabile) Gleichgewicht, bei der logistischen DGL sind es $f = 0$ (instabil) und $f = G$ (stabil). Der Grenzwert von Lösungen für $t \to \infty$ ist im Abitur eine häufige Frage und wird mit $\mathrm{e}^{-kt} \to 0$ begründet.

Welches Modell passt zu den Daten?

In Anwendungen liegen meist Messwerte in gleichen Zeitabständen vor. Bei exponentiellem Wachstum ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Werte konstant, denn in jedem Zeitschritt wird mit demselben Faktor multipliziert. Bei beschränktem Wachstum ist dagegen der Abstand zur Schranke $G - f$ in jedem Schritt um denselben Faktor kleiner. Beim logistischen Wachstum steigen die Zunahmen zunächst und fallen später wieder; der Verlauf ist S-förmig. Ein Blick auf Differenzen und Quotienten in einer Tabelle zeigt deshalb schnell, welches Modell sinnvoll ist.

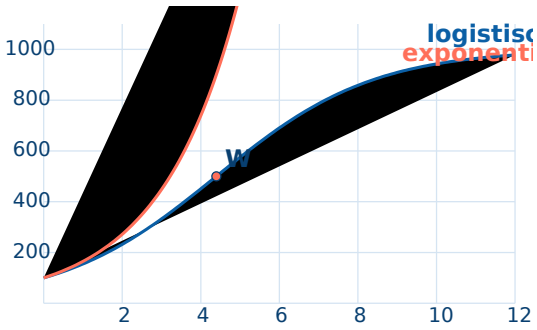
Beispiel 4: Ein Modell auswählen

Ein Getränk aus dem Kühlschrank erwärmt sich in einem $22\,^\circ\mathrm{C}$ warmen Raum. Gemessen werden alle zehn Minuten 6, 12, $15{,}75$ und $18{,}09\,^\circ\mathrm{C}$. Welches Modell passt?

Die Abstände zur Raumtemperatur betragen 16, 10, $6{,}25$ und $3{,}91$. Ihre Quotienten sind jeweils etwa $0{,}625$. Der Abstand zur Schranke nimmt also exponentiell ab: Es liegt beschränktes Wachstum vor, $T(t) = 22 - 16\,\mathrm{e}^{-kt}$ mit $\mathrm{e}^{-10k} = 0{,}625$, also $k = \frac{\ln 1{,}6}{10} \approx 0{,}047$.

Der Wendepunkt beim logistischen Wachstum

Beim logistischen Wachstum ist die Änderungsrate $f' = \frac{k}{G} f(G - f)$ ein Produkt zweier Faktoren: Der erste wächst mit dem Bestand, der zweite schrumpft. Als Funktion von f betrachtet ist das eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitel bei $f = \frac{G}{2}$. Dort ist die Zunahme am größten, und der Graph von f hat seinen Wendepunkt. Die maximale Änderungsrate beträgt $\frac{kG}{4}$. Die Abbildung vergleicht das logistische Modell $f(t) = \frac{1000}{1+9\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$ mit einem exponentiellen Modell mit gleichem Anfangswert.



Beispiel 5: Wann wächst der Bestand am schnellsten?

Für $f(t) = \frac{1000}{1+9\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$ sollen Zeitpunkt und Größe der stärksten Zunahme bestimmt werden.

Der Wendepunkt liegt bei $f = 500$: $1 + 9\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 2 \Rightarrow \mathrm{e}^{-0{,}5t} = \frac{1}{9} \Rightarrow t = \frac{\ln 9}{0{,}5} \approx 4{,}39$. Mit $k = 0{,}5$ und $G = 1\,000$ ist die größte Änderungsrate $\frac{0{,}5 \cdot 1000}{4} = 125$ Individuen pro Zeiteinheit. Danach nehmen die Zuwächse wieder ab, weil die Sättigung spürbar wird.

Gleichgewichte und Stabilität

Konstante Lösungen einer Differenzialgleichung heißen Gleichgewichtslösungen; für sie gilt $f' = 0$. Beim beschränkten Wachstum ist $f = G$ ein Gleichgewicht, beim logistischen sind es $f = 0$ und $f = G$. Ein Gleichgewicht ist stabil, wenn Bestände in seiner Nähe dorthin zurückkehren: Oberhalb muss f', unterhalb $f' > 0$ gelten. Beim logistischen Modell ist G stabil, 0 dagegen instabil, denn schon ein kleiner Bestand wächst davon weg. Mit dieser Überlegung kann man Modelle untersuchen, ohne die Differenzialgleichung zu lösen.

Beispiel 6: Eine Lösung prüfen

Zeigen Sie, dass $f(t) = 50 - 40\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ die Differenzialgleichung $f' = 0{,}1(50 - f)$ mit $f(0) = 10$ löst.

Linke Seite: $f'(t) = -40 \cdot (-0{,}1)\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 4\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$. Rechte Seite: $0{,}1\left(50 - 50 + 40\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}\right) = 4\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$. Beide Seiten stimmen für alle t überein. Anfangswert: $f(0) = 50 - 40 = 10$ ✓. Damit ist f die Lösung des Anfangswertproblems.

Wusstest du? Malthus und Verhulst

Der englische Ökonom Thomas Malthus behauptete 1798, die Bevölkerung wachse exponentiell, die Nahrungsmittel aber nur linear, und sagte Hungersnöte voraus. Der belgische Mathematiker Pierre-François Verhulst entgegnete 1838, dass begrenzte Ressourcen das Wachstum bremsen, und schlug das logistische Modell vor. Heute wird es in der Biologie, der Medizin und der Marktforschung eingesetzt, etwa für die Verbreitung neuer Produkte.

Parameter aus Messwerten bestimmen

In Abituraufgaben sind die Parameter eines Wachstumsmodells selten direkt gegeben. Meist kennt man den Anfangswert und einen weiteren Messwert, manchmal auch die Schranke. Das Vorgehen ist immer gleich: Man setzt die bekannten Größen in den allgemeinen Funktionsterm ein, löst nach dem Exponentialausdruck auf und logarithmiert. Beim beschränkten Wachstum rechnet man dabei am besten mit dem Abstand zur Schranke, beim logistischen Wachstum zunächst mit dem Kehrwert des Bestands. Wichtig ist eine sinnvolle Rundung: Die Konstante k sollte mit mindestens vier Nachkommastellen weiterverwendet werden, sonst entstehen bei großen Zeiten merkliche Fehler.

Zum Schluss lohnt sich immer eine Kontrolle: Setzt man den zweiten Messwert mit dem berechneten k wieder ein, muss er sich ergeben. Ebenso sollte man überlegen, ob das Ergebnis plausibel ist. Eine Halbwertszeit von wenigen Sekunden bei einem Medikament oder eine Verdopplungszeit von mehreren Jahrhunderten bei Bakterien deutet auf einen Rechenfehler hin, etwa ein vergessenes Minuszeichen oder vertauschte Einheiten. Wer Ergebnisse auf diese Weise hinterfragt, sammelt im Abitur auch die Punkte für die Interpretation.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Eine Differenzialgleichung (DGL) verknüpft eine Funktion mit ihrer Ableitung; sie beschreibt, wovon die Änderungsrate eines Bestands abhängt.
- Exponentielles Wachstum: $f' = kf$, Lösung $f(t) = f_0\,\mathrm{e}^{kt}$; Verdopplungszeit $\frac{\ln 2}{k}$, bei Zerfall (k) Halbwertszeit $\frac{\ln 2}{|k|}$.
- Beschränktes Wachstum mit Schranke G: $f' = k(G - f)$, Lösung $f(t) = G - (G - f_0)\,\mathrm{e}^{-kt}$; die Änderungsrate ist proportional zum Sättigungsmanko.
- Logistisches Wachstum: $f' = \frac{k}{G} f(G - f)$, Lösung $f(t) = \frac{G}{1 + \left(\frac{G}{f_0} - 1\right)\mathrm{e}^{-kt}}$; stärkste Zunahme (Wendepunkt) bei $f = \frac{G}{2}$.
- Lösungen einer DGL prüft man durch Einsetzen: f' berechnen, rechte Seite berechnen, vergleichen. Die Anfangsbedingung legt die Konstante fest.
- Modell erkennen: konstante Quotienten aufeinanderfolgender Werte ⇒ exponentiell; konstante Quotienten der Abstände zur Schranke ⇒ beschränkt; S-förmiger Verlauf mit Sättigung ⇒ logistisch.
- Gleichgewichtslösungen sind konstante Lösungen mit $f' = 0$; eine Gleichgewichtslage ist stabil, wenn Bestände in ihrer Nähe zu ihr hinstreben.
- Modellgrenzen: Exponentielles Wachstum ist nur kurzfristig realistisch; Parameter werden aus Messwerten mit dem Logarithmus bestimmt.

Achtung: Typische Fehler

- Beim Nachweis der Lösung nur f einsetzen, aber nicht f' bilden.
- Vorzeichen von k verwechseln: Wachstum $k > 0$, Zerfall k.
- Bei beschränktem Wachstum f_0 statt $G - f_0$ als Faktor vor e^{-kt} schreiben.
- Den Wendepunkt des logistischen Wachstums mit dem Grenzwert verwechseln.

Ottos Tipp: Zeichne bei jeder Modellierung die ungefähre Kurve: Exponentiell geht steil nach oben, beschränkt flacht ab, logistisch hat eine S-Form. So erkennst du das richtige Modell sofort!

Ottos Tipp

Bevor Sie ein Modell wählen, fragen Sie: Wächst der Bestand proportional zu sich selbst, gibt es eine Schranke, oder verlangsamt sich das Wachstum später? Die Antwort legt die Differenzialgleichung fest.