# Arbeitsblatt - Wachstumsmodelle und Differenzialgleichungen

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

## Aufgabe 1

### Aufgabe 1 – Exponentialmodell aus zwei Werten

Ein Bestand wächst exponentiell. Zu Beginn sind es $200$ Einheiten, nach $3$ Stunden $500$ Einheiten.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $N(t) = N_0 \, \mathrm{e}^{kt}$.
b) Berechnen Sie die Verdopplungszeit.
c) Wie groß ist der Bestand nach $5$ Stunden?
d) Geben Sie die Differenzialgleichung an, die $N$ erfüllt.

## Aufgabe 2

### Aufgabe 2 – Lösungen einer DGL prüfen

Prüfen Sie durch Einsetzen.

a) $f(t) = 5\,\mathrm{e}^{0{,}3t}$ löst $f' = 0{,}3f$.
b) $g(t) = 10 - 7\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ löst $g' = 0{,}2(10 - g)$.
c) $h(t) = 3t^2$ löst $h' = 0{,}5h$ nicht.
d) Welche Anfangswerte haben $f$ und $g$?

## Aufgabe 3

### Aufgabe 3 – Ein Anfangswertproblem

Ein Wirkstoff wird im Körper abgebaut. Es gilt $f'(t) = -0{,}04 f(t)$ mit $f(0) = 80$ (mg, $t$ in Stunden).

a) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems an.
b) Wie viel Wirkstoff ist nach $24$ Stunden noch vorhanden?
c) Bestimmen Sie die Halbwertszeit.
d) Nach welcher Zeit sind nur noch $10$ mg vorhanden?

## Aufgabe 4

### Aufgabe 4 – Beschränktes Wachstum

Für einen Bestand gilt $f' = 0{,}1(50 - f)$ mit $f(0) = 10$.

a) Geben Sie die Schranke an und bestimmen Sie die Lösung.

b) Berechnen Sie $f(10)$.
c) Wann ist $f(t) = 45$?
d) Zeigen Sie, dass die Änderungsrate ständig abnimmt.

## Aufgabe 5

**Aufgabe 5 – Logistisches Wachstum**

Gegeben ist $f(t) = \dfrac{100}{1 + 9\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$.

a) Bestimmen Sie $f(0)$ und die Schranke $G$.
b) Wann ist die Hälfte der Schranke erreicht?
c) Berechnen Sie die maximale Änderungsrate.
d) Geben Sie die logistische Differenzialgleichung an.

## Aufgabe 6

**Aufgabe 6 – Welches Modell?**

Ordnen Sie den Messreihen (gleiche Zeitabstände) ein passendes Modell zu und begründen Sie.

| Reihe | $t=0$ | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ |
|---|---|---|---|---|
| A | $40$ | $60$ | $90$ | $135$ |
| B | $40$ | $55$ | $70$ | $85$ |
| C | $20$ | $60$ | $80$ | $90$ |

a) Untersuchen Sie Differenzen und Quotienten der Reihe A.
b) Untersuchen Sie Reihe B.
c) Reihe C strebt gegen $100$. Untersuchen Sie die Abstände zu $100$.
d) Geben Sie für jede Reihe eine Funktionsgleichung an.

## Aufgabe 7

**Aufgabe 7 – Bakterien in der Petrischale**

Im Biologie-Leistungskurs wird eine Bakterienkultur beobachtet. Zu Beginn sind $1\,000$ Bakterien vorhanden, ihre Zahl verdoppelt sich alle $20$ Minuten.

a) Stellen Sie die Funktion $N(t)$ auf ($t$ in Minuten).
b) Wie viele Bakterien sind es nach $3$ Stunden?
c) Wann ist eine Million erreicht?
d) Warum kann das Modell nicht über viele Stunden gelten?

## Aufgabe 8

**Aufgabe 8 – Der Tee kühlt ab**

Ein Tee hat $90\,^\circ\mathrm{C}$, der Raum $20\,^\circ\mathrm{C}$. Nach $5$ Minuten misst man $70\,^\circ\mathrm{C}$. Nach dem

Abkühlungsgesetz von Newton gilt $T' = -k(T - 20)$.

a) Begründen Sie den Ansatz $T(t) = 20 + 70\,\mathrm{e}^{-kt}$.
b) Bestimmen Sie $k$.
c) Wann hat der Tee die Trinktemperatur $55\,^\circ\mathrm{C}$?
d) Wie schnell kühlt der Tee zu Beginn ab?

## Aufgabe 9

### Aufgabe 9 – Die Infusion

Ein Patient erhält im Krankenhaus eine Dauerinfusion, die $2$ mg pro Stunde eines Wirkstoffs zuführt. Gleichzeitig baut der Körper stündlich $10\,\%$ der vorhandenen Menge ab. Es gilt $c' = 2 - 0{,}1c$, $c(0) = 0$.

a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtsmenge.
b) Zeigen Sie, dass $c(t) = 20(1 - \mathrm{e}^{-0{,}1t})$ die Lösung ist.
c) Wann sind $15$ mg erreicht?
d) Die Infusion wird nach $24$ Stunden beendet. Welche DGL gilt danach?

## Aufgabe 10

### Aufgabe 10 – Radioaktives Cäsium

Beim Reaktorunglück von Tschernobyl 1986 gelangte Cäsium-137 bis nach Süddeutschland; noch heute sind manche Wildpilze im Bayerischen Wald belastet. Cäsium-137 hat eine Halbwertszeit von etwa $30$ Jahren.

a) Bestimmen Sie die Zerfallskonstante.
b) Welcher Anteil der Menge von 1986 war 2026 noch vorhanden?
c) In welchem Jahr ist nur noch $1\,\%$ vorhanden?
d) Erklären Sie, warum die Belastung von Pilzen langsamer zurückgeht als die von Getreide.

## Aufgabe 11

### Aufgabe 11 – Die neue App

An einem Gymnasium mit $1\,200$ Schülerinnen und Schülern nutzen am Tag $0$ zwölf Personen eine neue App, einen Tag später $60$. Die Ausbreitung wird logistisch modelliert: $f(t) = \dfrac{1200}{1 + 99\,\mathrm{e}^{-kt}}$.

a) Zeigen Sie, dass $f(0) = 12$ gilt.
b) Bestimmen Sie $k$.
c) Wann nutzt die Hälfte der Schule die App?
d) Wie viele neue Nutzer kommen am Tag der stärksten Ausbreitung ungefähr hinzu?

## Aufgabe 12

### Aufgabe 12 – Fische im Baggersee

Ein Angelverein setzt in einen Baggersee $1\,000$ Jungfische ein. Der See bietet Lebensraum für höchstens $5\,000$ Fische. Der Bestand wird beschränkt modelliert: $f' = 0{,}3(5000 - f)$ ($t$ in Jahren).

a) Geben Sie die Lösung an.
b) Wie groß ist der Bestand nach $5$ Jahren?
c) Wann sind $90\,\%$ der Kapazität erreicht?
d) Beurteilen Sie, ob ein logistisches Modell hier geeigneter wäre.

## Aufgabe 13

### Aufgabe 13 – Das Getränk aus dem Kühlschrank

Eine Flasche Apfelschorle wird mit $6\,^\circ\mathrm{C}$ aus dem Kühlschrank genommen und steht in einem $22\,^\circ\mathrm{C}$ warmen Raum. Nach $10$ Minuten hat sie $12\,^\circ\mathrm{C}$.

a) Stellen Sie ein Modell $T(t) = 22 - 16\,\mathrm{e}^{-kt}$ auf und bestimmen Sie $k$.
b) Welche Temperatur hat die Schorle nach einer halben Stunde?
c) Wann ist sie $18\,^\circ\mathrm{C}$ warm?
d) Geben Sie die zugehörige Differenzialgleichung an.

## Aufgabe 14

### Aufgabe 14 – Wildkaninchen auf der Insel

Auf einer kleinen Nordseeinsel werden $50$ Wildkaninchen ausgesetzt. Die Insel bietet Nahrung für etwa $2\,000$ Tiere. Ein Biologe vergleicht zwei Modelle ($t$ in Jahren): exponentiell $E(t) = 50\,\mathrm{e}^{0{,}8t}$, logistisch $L(t) = \dfrac{2000}{1 + 39\,\mathrm{e}^{-0{,}8t}}$.

| $t$ | $2$ | $5$ | $10$ |
|---|---|---|---|
| $E(t)$ | ? | ? | ? |
| $L(t)$ | ? | ? | ? |

a) Füllen Sie die Tabelle aus.
b) Bis wann stimmen die Modelle ungefähr überein?
c) Wann erreicht der logistische Bestand $1\,000$ Tiere?
d) Welches Modell ist langfristig realistisch? Begründen Sie.

## Aufgabe 15

### Aufgabe 15 – Die Grippewelle

An einer Gesamtschule mit $1\,500$ Schülerinnen und Schülern breitet sich eine Grippe aus. Die Zahl der bisher Erkrankten wird beschrieben durch $f(t) = \dfrac{1500}{1 + 149\,\mathrm{e}^{-0{,}6t}}$ ($t$ in Tagen).

a) Wie viele sind zu Beginn erkrankt?
b) Wann sind die meisten Neuerkrankungen pro Tag zu erwarten, und wie viele sind es?
c) Wann sind $90\,\%$ der Schülerschaft erkrankt gewesen?
d) Die Schulleitung plant ab $300$ Erkrankten Notmaßnahmen. Ab welchem Tag?
e) Nennen Sie zwei Gründe, warum das Modell die Wirklichkeit vereinfacht.

## Aufgabe 16

### Aufgabe 16 – Die Todeszeit im Krimi

In einem Fernsehkrimi wird um $22{:}00$ Uhr eine Leiche in einem $18\,^\circ\mathrm{C}$ warmen Raum gefunden; ihre Temperatur beträgt $30\,^\circ\mathrm{C}$. Um $23{:}00$ Uhr misst die Rechtsmedizinerin $28\,^\circ\mathrm{C}$. Die Körpertemperatur zum Todeszeitpunkt betrug $37\,^\circ\mathrm{C}$. Es gilt das Abkühlungsgesetz von Newton.

a) Stellen Sie mit $t = 0$ um $22{:}00$ Uhr den Ansatz $T(t) = 18 + 12\,\mathrm{e}^{-kt}$ auf und bestimmen Sie $k$ ($t$ in Stunden).
b) Bestimmen Sie den Todeszeitpunkt.
c) Welche Temperatur hätte der Körper um Mitternacht?
d) Ein Verdächtiger hat für die Zeit ab $20{:}00$ Uhr ein Alibi. Ist er entlastet?

## Aufgabe 17

### Aufgabe 17 – Der undichte Pool

Ein Gartenpool wird mit einem Schlauch befüllt, der $2\,\mathrm{m}^3$ pro Stunde liefert. Durch ein Leck verliert der Pool stündlich $5\,\%$ seines Inhalts. Zu Beginn sind $10\,\mathrm{m}^3$ Wasser im Pool, er fasst $38\,\mathrm{m}^3$.

a) Stellen Sie die Differenzialgleichung für das Volumen $V(t)$ auf.
b) Bestimmen Sie das Gleichgewichtsvolumen. Was bedeutet es für den Pool?
c) Zeigen Sie, dass $V(t) = 40 - 30\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}$ die Lösung ist.
d) Wann ist der Pool randvoll?
e) Wie stark müsste der Schlauch mindestens sein, damit man den Pool trotz Leck voll bekommt?

## Aufgabe 18

### Aufgabe 18 – Parameter einer Lösung bestimmen

Gesucht ist eine Lösung der Form $f(t) = a\,\mathrm{e}^{kt} + b$ der Differenzialgleichung $f' = 0{,}5f - 3$ mit $f(0) = 10$.

a) Setzen Sie den Ansatz in die DGL ein und vergleichen Sie die Terme.
b) Bestimmen Sie $k$ und $b$.
c) Bestimmen Sie $a$ aus der Anfangsbedingung.
d) Was passiert für den Startwert $f(0) = 6$?

## Aufgabe 19

### Aufgabe 19 – Die logistische Lösung

Gegeben ist $f(t) = \dfrac{G}{1 + c\,\mathrm{e}^{-kt}}$ mit $G, c, k > 0$.

a) Zeigen Sie: $f'(t) = \dfrac{Gck\,\mathrm{e}^{-kt}}{(1 + c\,\mathrm{e}^{-kt})^2}$.

b) Zeigen Sie: $f' = \frac{k}{G} f(G - f)$.

c) Bestimmen Sie $c$ aus dem Anfangswert $f(0) = f_0$.

d) Zeigen Sie, dass der Wendepunkt bei $f = \frac{G}{2}$ liegt.

## Aufgabe 20

### Aufgabe 20 – Fischfang und Gleichgewicht (Knobelaufgabe)

Ein Fischbestand (in Tonnen) wächst ohne Fang logistisch nach $f' = 0{,}02 f(50 - f)$. Eine Fischereigenossenschaft fängt jedes Jahr gleichmäßig $8$ Tonnen: $f' = 0{,}02 f(50 - f) - 8$.

a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtsbestände mit Fang.

b) Untersuchen Sie das Vorzeichen von $f'$ in den Bereichen dazwischen.

c) Welches Gleichgewicht ist stabil? Was passiert mit einem Bestand von $8$ Tonnen?

d) Wie groß darf die jährliche Fangmenge höchstens sein, damit überhaupt ein Gleichgewicht existiert?