Lösungen - Wachstumsmodelle und Differenzialgleichungen

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Der Anfangswert liefert N_0. Den zweiten Messwert setzt man ein und löst die Gleichung mit dem natürlichen Logarithmus nach k auf. Verdopplungszeit, spätere Bestände und die Differenzialgleichung folgen dann direkt aus der Funktionsgleichung.

a) $N_0 = 200$. Aus $200\,\mathrm{e}^{3k} = 500$ folgt $\mathrm{e}^{3k} = 2{,}5$, also $k = \frac{\ln 2{,}5}{3} \approx 0{,}3054$. Damit ist $N(t) = 200\,\mathrm{e}^{0{,}3054t}$.
b) $T_D = \frac{\ln 2}{k} \approx 2{,}27$ Stunden. Nach dieser Zeit hat sich der Bestand jeweils verdoppelt.
c) $N(5) = 200\,\mathrm{e}^{5k} \approx 921$ Einheiten.
d) $N' = k\,N$ mit $k \approx 0{,}3054$: Die Änderungsrate ist proportional zum Bestand.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Um eine Lösung zu prüfen, berechnet man die Ableitung (linke Seite) und setzt die Funktion in die rechte Seite ein. Stimmen beide Terme für alle t überein, ist die Funktion eine Lösung; ein einziger Gegenwert genügt, um das Gegenteil zu zeigen.

a) $f'(t) = 5 \cdot 0{,}3\,\mathrm{e}^{0{,}3t} = 1{,}5\,\mathrm{e}^{0{,}3t}$ und $0{,}3f(t) = 1{,}5\,\mathrm{e}^{0{,}3t}$. Beide Seiten sind gleich, f ist eine Lösung.
b) $g'(t) = -7 \cdot (-0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 1{,}4\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$; $0{,}2(10 - g) = 0{,}2 \cdot 7\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 1{,}4\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$. Gleich, also Lösung.
c) $h'(t) = 6t$, aber $0{,}5h(t) = 1{,}5t^2$. Für $t = 1$ gilt $6 \neq 1{,}5$; h ist keine Lösung.
d) $f(0) = 5$ und $g(0) = 10 - 7 = 3$.

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg: Die Gleichung $f' = kf$ mit negativem k beschreibt exponentiellen Zerfall. Mit dem Anfangswert erhält man die Lösung. Restmengen ergeben sich durch Einsetzen, Halbwertszeit und andere Zeitpunkte durch Logarithmieren.

a) Die DGL beschreibt exponentiellen Zerfall mit $k = -0{,}04$: $f(t) = 80\,\mathrm{e}^{-0{,}04t}$. Probe: $f(0) = 80$.
b) $f(24) = 80\,\mathrm{e}^{-0{,}96} \approx 30{,}6$ mg.
c) $\mathrm{e}^{-0{,}04t} = 0{,}5 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0{,}04} \approx 17{,}33$ Stunden.
d) $80\,\mathrm{e}^{-0{,}04t} = 10 \Rightarrow \mathrm{e}^{-0{,}04t} = 0{,}125 \Rightarrow t = \frac{\ln 8}{0{,}04} \approx 52{,}0$ Stunden, also genau drei Halbwertszeiten.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Aus der Form $f' = k(G - f)$ liest man Schranke und Wachstumskonstante ab und setzt sie in die allgemeine Lösung ein. Zeitpunkte bestimmt man, indem man nach der Exponentialfunktion auflöst und logarithmiert. Die zweite Ableitung zeigt das gebremste Wachstum.

a) Schranke $G = 50$. Lösung $f(t) = 50 - (50 - 10)\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 50 - 40\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.
b) $f(10) = 50 - 40\,\mathrm{e}^{-1} \approx 35{,}28$.
c) $40\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 5 \Rightarrow \mathrm{e}^{-0{,}1t} = \frac{1}{8} \Rightarrow t = 10\ln 8 \approx 20{,}79$.
d) $f'(t) = 4\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ ist positiv, aber streng monoton fallend, weil $f''(t) = -0{,}4\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$. Der Bestand wächst immer langsamer.

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Den Anfangswert erhält man durch Einsetzen von $t = 0$, die Schranke als Grenzwert für $t \to \infty$. Die Hälfte der Schranke markiert den Wendepunkt; dort ist die Änderungsrate am größten und wird mit der logistischen Differenzialgleichung berechnet.

a) $f(0) = \frac{100}{10} = 10$; für $t \to \infty$ gilt $\mathrm{e}^{-0{,}5t} \to 0$, also $G = 100$.
b) $1 + 9\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 2 \Rightarrow \mathrm{e}^{-0{,}5t} = \frac{1}{9} \Rightarrow t = 2\ln 9 \approx 4{,}39$.
c) Bei $f = 50$: $f' = \frac{0{,}5}{100} \cdot 50 \cdot 50 = 12{,}5$ pro Zeiteinheit.
d) $f' = \frac{0{,}5}{100} f(100 - f) = 0{,}005\, f(100 - f)$.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Für jede Messreihe werden Differenzen und Quotienten aufeinanderfolgender Werte gebildet. Konstante Differenzen bedeuten lineares, konstante Quotienten exponentielles Wachstum. Nähern sich die Werte einer Schranke, betrachtet man die Abstände zu ihr.

a) Quotienten: $\frac{60}{40} = \frac{90}{60} = \frac{135}{90} = 1{,}5$, konstant. Reihe A wächst exponentiell.
b) Differenzen: jeweils 15, konstant. Reihe B wächst linear.
c) Abstände 80, 40, 20, 10: Sie halbieren sich jeweils. Reihe C beschreibt beschränktes Wachstum mit $G = 100$.
d) A: $f(t) = 40 \cdot 1{,}5^t = 40\,\mathrm{e}^{0{,}4055t}$; B: $f(t) = 40 + 15t$; C: $f(t) = 100 - 80 \cdot 0{,}5^t = 100 - 80\,\mathrm{e}^{-0{,}6931t}$.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: Aus der Verdopplungszeit folgt die Wachstumskonstante $k = \frac{\ln 2}{T_D}$. Bestände nach einer Zeit erhält man durch Einsetzen oder durch Zählen der Verdopplungen. Für den Zeitpunkt einer bestimmten Anzahl wird logarithmiert; am Ende werden die Modellgrenzen bewertet.

a) $k = \frac{\ln 2}{20} \approx 0{,}0347$: $N(t) = 1000\,\mathrm{e}^{0{,}0347t} = 1000 \cdot 2^{t/20}$.
b) 180 Minuten sind 9 Verdopplungen: $N(180) = 1000 \cdot 2^9 = 512\,000$ Bakterien.

c) $2^{t/20} = 1000 \Rightarrow t = 20 \cdot \frac{\ln 1000}{\ln 2} \approx 199$ Minuten, also etwa 3 Stunden und 19 Minuten.
d) Nährstoffe und Platz in der Schale sind begrenzt; das Wachstum wird gebremst. Realistischer ist ein logistisches Modell.

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: Nach Newton nimmt der Temperaturunterschied zum Raum exponentiell ab. Mit dem Messwert nach fünf Minuten bestimmt man k, danach berechnet man den Zeitpunkt der Trinktemperatur. Die Anfangsabkühlung ist die Ableitung an der Stelle null.

a) Beschränkte Abnahme gegen die Raumtemperatur 20: Die Lösung hat die Form $20 + (T_0 - 20)\mathrm{e}^{-kt}$ mit $T_0 = 90$.
b) $20 + 70\,\mathrm{e}^{-5k} = 70 \Rightarrow \mathrm{e}^{-5k} = \frac{5}{7} \Rightarrow k = \frac{\ln 1{,}4}{5} \approx 0{,}0673$.
c) $70\,\mathrm{e}^{-kt} = 35 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{k} \approx 10{,}3$ Minuten.
d) $T'(0) = -70k \approx -4{,}71\,^{\circ}\mathrm{C}$ pro Minute.

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Zufuhr und Abbau stehen in der Differenzialgleichung; das Gleichgewicht ergibt sich aus $c' = 0$. Die angegebene Lösung wird durch Einsetzen geprüft, Zeitpunkte durch Logarithmieren bestimmt. Nach dem Ende der Infusion bleibt nur der Abbau übrig.

a) Gleichgewicht: $c' = 0 \Rightarrow 2 = 0{,}1c \Rightarrow c = 20$ mg.
b) $c'(t) = 2\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$; $2 - 0{,}1 \cdot 20(1 - \mathrm{e}^{-0{,}1t}) = 2\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ ✓; $c(0) = 0$ ✓.
c) $1 - \mathrm{e}^{-0{,}1t} = 0{,}75 \Rightarrow t = 10\ln 4 \approx 13{,}9$ Stunden.
d) Ohne Zufuhr: $c' = -0{,}1c$ mit Startwert $c(24) \approx 18{,}19$ mg, also exponentieller Abbau.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Die Zerfallskonstante folgt aus der Halbwertszeit. Den verbleibenden Anteil berechnet man mit der Anzahl der vergangenen Halbwertszeiten. Für den Zeitpunkt, an dem nur noch ein Prozent übrig ist, wird logarithmiert und das Ergebnis in eine Jahreszahl übersetzt.

a) $k = \frac{\ln 2}{30} \approx 0{,}0231$ pro Jahr.
b) 40 Jahre: $0{,}5^{40/30} \approx 0{,}397$, also knapp $40\,\%$.
c) $0{,}5^{t/30} = 0{,}01 \Rightarrow t = 30 \cdot \frac{\ln 100}{\ln 2} \approx 199$ Jahre, also etwa im Jahr 2185.
d) Pilze nehmen Cäsium aus dem Waldboden auf, wo es in der Humusschicht festgehalten wird; Ackerböden werden umgepflügt und verdünnen es. Der Zerfall selbst ist überall gleich schnell.

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: Der Anfangswert bestätigt die Konstante im Nenner. Mit dem zweiten Messwert erhält man k durch Umformen und Logarithmieren. Die Hälfte der Schule

entspricht dem Wendepunkt, die stärkste Ausbreitung beträgt $\frac{kG}{4}$.

a) $f(0) = \frac{1200}{1+99} = 12$ ✓.
b) $\frac{1200}{1+99\,\mathrm{e}^{-k}} = 60 \Rightarrow 1 + 99\,\mathrm{e}^{-k} = 20 \Rightarrow \mathrm{e}^{-k} = \frac{19}{99} \Rightarrow k = \ln\frac{99}{19} \approx 1{,}6507$.
c) $99\,\mathrm{e}^{-kt} = 1 \Rightarrow t = \frac{\ln 99}{k} \approx 2{,}78$ Tage.
d) Maximale Rate $\frac{kG}{4} \approx \frac{1{,}651 \cdot 1200}{4} \approx 495$ neue Nutzer pro Tag.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Die beschränkte Wachstumsgleichung liefert Schranke und Konstante, damit die Lösung. Bestände nach einer Zeit erhält man durch Einsetzen, Zeitpunkte durch Logarithmieren. Am Ende wird geprüft, ob das Modell zur Biologie der Fische passt.

a) $f(t) = 5000 - 4000\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}$.
b) $f(5) = 5000 - 4000\,\mathrm{e}^{-1{,}5} \approx 4107$ Fische.
c) $4000\,\mathrm{e}^{-0{,}3t} = 500 \Rightarrow t = \frac{\ln 8}{0{,}3} \approx 6{,}93$ Jahre.
d) Beim beschränkten Modell ist die Zunahme am Anfang am größten. Bei Fischen hängt die Vermehrung aber von der Zahl der Elterntiere ab; das logistische Modell berücksichtigt das und wäre biologisch plausibler.

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Mit Anfangstemperatur und Raumtemperatur ist der Ansatz festgelegt; der Messwert nach zehn Minuten liefert k. Spätere Temperaturen und Zeitpunkte folgen durch Einsetzen bzw. Logarithmieren, die Differenzialgleichung aus der Form des beschränkten Wachstums.

a) $22 - 16\,\mathrm{e}^{-10k} = 12 \Rightarrow \mathrm{e}^{-10k} = 0{,}625 \Rightarrow k = \frac{\ln 1{,}6}{10} \approx 0{,}0470$.
b) $T(30) = 22 - 16 \cdot 0{,}625^3 \approx 18{,}1\,^\circ\mathrm{C}$.
c) $16\,\mathrm{e}^{-kt} = 4 \Rightarrow t = \frac{\ln 4}{k} \approx 29{,}5$ Minuten.
d) $T' = k(22 - T)$ mit $k \approx 0{,}0470$.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Beide Modelle werden für dieselben Zeitpunkte ausgewertet und in der Tabelle verglichen. Solange der Bestand klein ist, stimmen sie fast überein. Für den halben Sättigungswert löst man die logistische Gleichung, zuletzt wird die Realitätsnähe beurteilt.

a) $E(2) \approx 248$, $E(5) \approx 2730$, $E(10) \approx 149\,048$; $L(2) \approx 225$, $L(5) \approx 1167$, $L(10) \approx 1974$.
b) In den ersten zwei Jahren sind die Werte ähnlich, solange der Bestand klein gegenüber $2\,000$ ist. Danach wächst das exponentielle Modell viel zu schnell.
c) $39\,\mathrm{e}^{-0{,}8t} = 1 \Rightarrow t = \frac{\ln 39}{0{,}8} \approx 4{,}58$ Jahre.
d) Das logistische Modell, denn die Nahrung reicht nur für etwa $2\,000$ Tiere; das exponentielle Modell würde nach zehn Jahren über eine Million Kaninchen vorhersagen.

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Zuerst wird der Anfangsbestand berechnet. Die stärkste Ausbreitung liegt im Wendepunkt bei der Hälfte der Schranke. Für vorgegebene Zahlen von Erkrankten wird die Gleichung nach der Exponentialfunktion aufgelöst und logarithmiert; anschließend wird das Modell kritisch betrachtet.

a) $f(0) = \frac{1500}{150} = 10$ Erkrankte.

b) Wendepunkt bei $f = 750$: $t = \frac{\ln 149}{0{,}6} \approx 8{,}34$ Tage; maximale Rate $\frac{0{,}6 \cdot 1500}{4} = 225$ Neuerkrankungen pro Tag.

c) $\frac{1500}{1+149\,\mathrm{e}^{-0{,}6t}} = 1350 \Rightarrow 149\,\mathrm{e}^{-0{,}6t} = \frac{1}{9} \Rightarrow t = \frac{\ln(1341)}{0{,}6} \approx 12{,}0$ Tage.

d) $149\,\mathrm{e}^{-0{,}6t} = 4 \Rightarrow t = \frac{\ln 37{,}25}{0{,}6} \approx 6{,}0$, also nach gut 6 Tagen.

e) Nicht alle Schülerinnen und Schüler erkranken (Impfung, Immunität), und Erkrankte werden wieder gesund und stecken dann niemanden mehr an. Außerdem spielen Ferien und Kontakte außerhalb der Schule eine Rolle.

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: Der Messwert um $23{:}00$ Uhr liefert die Abkühlungskonstante. Den Todeszeitpunkt findet man, indem man die Gleichung für $37\,^\circ\mathrm{C}$ löst; ein negatives t bedeutet einen Zeitpunkt vor dem Fund. Dann wird das Alibi mit diesem Zeitpunkt verglichen.

a) $18 + 12\,\mathrm{e}^{-k} = 28 \Rightarrow \mathrm{e}^{-k} = \frac{5}{6} \Rightarrow k = \ln 1{,}2 \approx 0{,}1823$.

b) $18 + 12\,\mathrm{e}^{-kt} = 37 \Rightarrow \mathrm{e}^{-kt} = \frac{19}{12} \Rightarrow t = -\frac{\ln \frac{19}{12}}{k} \approx -2{,}52$ h, also etwa 2 h 31 min vor $22{:}00$ Uhr: gegen $19{:}29$ Uhr.

c) $T(2) = 18 + 12 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 26{,}33\,^\circ\mathrm{C}$.

d) Nein: Der Tod trat nach dem Modell gegen $19{:}30$ Uhr ein, also vor $20{:}00$ Uhr. Das Alibi deckt den Tatzeitpunkt nicht ab.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: Die Differenzialgleichung entsteht aus Zufluss minus Verlust. Ihr Gleichgewicht zeigt, welches Volumen sich langfristig einstellt. Die angegebene Lösung wird durch Einsetzen bestätigt, und für den Füllzeitpunkt wird logarithmiert.

a) $V' = 2 - 0{,}05V$: Zufluss minus Verlust.

b) $V' = 0 \Rightarrow V = 40\,\mathrm{m}^3$. Das Gleichgewicht liegt über dem Fassungsvermögen; der Pool kann also voll werden.

c) $V'(t) = 1{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}$ und $2 - 0{,}05(40 - 30\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}) = 1{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}$ ✓; $V(0) = 10$ ✓.

d) $40 - 30\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} = 38 \Rightarrow \mathrm{e}^{-0{,}05t} = \frac{1}{15} \Rightarrow t = 20 \ln 15 \approx 54{,}2$ Stunden.

e) Das Gleichgewicht $\frac{z}{0{,}05} = 20z$ muss mindestens 38 betragen: $z \geq 1{,}9\,\mathrm{m}^3$ pro Stunde; bei genau $1{,}9$ würde der Pool aber nie ganz voll, also braucht man mehr als $1{,}9\,\mathrm{m}^3$ pro Stunde.

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Der Ansatz wird abgeleitet und in die Differenzialgleichung eingesetzt. Ein Koeffizientenvergleich der Exponentialterme und der Konstanten liefert k und b. Die Anfangsbedingung bestimmt a; der Sonderfall $a = 0$ ist eine Gleichgewichtslösung.

a) Linke Seite $ak\,\mathrm{e}^{kt}$, rechte Seite $0{,}5a\,\mathrm{e}^{kt} + 0{,}5b - 3$. Die Exponentialterme und die konstanten Terme müssen jeweils übereinstimmen.
b) $ak = 0{,}5a \Rightarrow k = 0{,}5$; $0{,}5b - 3 = 0 \Rightarrow b = 6$.
c) $f(0) = a + 6 = 10 \Rightarrow a = 4$: $f(t) = 4\,\mathrm{e}^{0{,}5t} + 6$.
d) Dann ist $a = 0$ und $f(t) = 6$ konstant: eine Gleichgewichtslösung. Sie ist instabil, denn jede kleine Abweichung wächst exponentiell.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Die Ableitung entsteht mit der Kettenregel. Durch geschicktes Umformen von $G - f$ wird gezeigt, dass die logistische Differenzialgleichung erfüllt ist. Der Anfangswert liefert c, und die Parabelform der Änderungsrate erklärt die Lage des Wendepunkts.

a) Kettenregel mit $f = G(1 + c\,\mathrm{e}^{-kt})^{-1}$: $f' = -G(1 + c\,\mathrm{e}^{-kt})^{-2} \cdot (-ck\,\mathrm{e}^{-kt})$.
b) $G - f = \frac{Gc\,\mathrm{e}^{-kt}}{1 + c\,\mathrm{e}^{-kt}}$; daher $\frac{k}{G} f(G - f) = \frac{k}{G} \cdot \frac{G}{1 + c\mathrm{e}^{-kt}} \cdot \frac{Gc\,\mathrm{e}^{-kt}}{1 + c\mathrm{e}^{-kt}} = f'$ ✓.
c) $f_0 = \frac{G}{1+c} \Rightarrow c = \frac{G}{f_0} - 1$.
d) $f' = \frac{k}{G}(Gf - f^2)$ ist eine Parabel in f mit Scheitel bei $f = \frac{G}{2}$; dort ist f' maximal. Da $f'' = \frac{k}{G}(G - 2f)f'$, wechselt f'' bei $f = \frac{G}{2}$ das Vorzeichen: Wendepunkt.

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: Gleichgewichte sind Nullstellen der rechten Seite. Das Vorzeichen von f' zwischen ihnen zeigt, ob Bestände zu einem Gleichgewicht hin- oder von ihm wegstreben. Die höchstmögliche Fangmenge entspricht dem Maximum der natürlichen Wachstumsrate.

a) $0{,}02(50f - f^2) = 8 \Rightarrow f^2 - 50f + 400 = 0 \Rightarrow f = 10$ oder $f = 40$ Tonnen.
b) $f' = -0{,}02(f - 10)(f - 40)$: für f negativ, für 10 positiv, für $f > 40$ negativ.
c) 40 ist stabil (Bestände darüber nehmen ab, darunter zu); 10 ist instabil. Ein Bestand von 8 Tonnen schrumpft weiter und bricht zusammen.
d) Die Wachstumsrate $0{,}02f(50 - f)$ ist bei $f = 25$ maximal mit $0{,}02 \cdot 25 \cdot 25 = 12{,}5$. Bei einer Fangmenge über $12{,}5$ Tonnen gibt es kein Gleichgewicht mehr, der Bestand wird überfischt.