Lösungen zur Klassenarbeit - Stammfunktion und Integral

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die allgemeine Stammfunktion wird mit der Potenzregel gebildet; die Bedingung $F(0) = 2$ legt die Konstante fest (zwei BE). Für das bestimmte Integral setzt man die Grenzen in eine Stammfunktion ein und bildet die Differenz; die Konstante spielt dabei keine Rolle (zwei BE). Zwischenschritt: $\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^3 = 9 - 18 + 9 = 0$; die Flächen ober- und unterhalb der x-Achse heben sich genau auf.

a) $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + C$, $F(0) = C = 2$, also $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 2$. (2 BE)

b) $\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^3 = 9 - 18 + 9 - 0 = 0$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 2 (3 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Bei der linearen Verkettung wird die Stammfunktion der äußeren Funktion gebildet und durch die innere Ableitung 3 geteilt; die Probe mit der Kettenregel bestätigt das (eine BE). Dann werden die Grenzen eingesetzt und die Differenz berechnet (zwei BE). Das Ergebnis kann durch Ausmultiplizieren kontrolliert werden. Zwischenschritt: $F(x) = \frac{(3x+1)^3}{9}$, also $\frac{7^3 - 1^3}{9} = \frac{342}{9} = 38$. Kontrolle durch Ausmultiplizieren: $\int_0^2 (9x^2 + 6x + 1)\,\mathrm{d}x = 24 + 12 + 2 = 38$.

a) $F(x) = \frac{(3x+1)^3}{9}$; $F'(x) = \frac{3(3x+1)^2 \cdot 3}{9} = (3x+1)^2$. (1 BE)

b) $F(2) = \frac{343}{9}$, $F(0) = \frac{1}{9}$, Ergebnis $\frac{342}{9} = 38$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 3 (2 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Das Integral wird allgemein mit der Stammfunktion $-\frac{1}{x}$ berechnet und ergibt $1 - \frac{1}{a}$ (eine BE). Setzt man diesen Ausdruck gleich $\frac{1}{2}$, erhält man eine einfache Gleichung, deren Lösung $a = 2$ die Bedingung $a > 0$ erfüllt (eine BE). Kontrolle: $\int_1^2 x^{-2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Häufiger Fehler: als Stammfunktion von $\frac{1}{x^2}$ fälschlich $\ln(x^2)$ oder $\frac{1}{x}$ ohne Minuszeichen zu verwenden. Für 0 wäre das Integral negativ, deshalb kommt nur ein Wert $a > 1$ in Frage, und $a = 2$ erfüllt das.

$\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = 1 - \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 4 (6 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Der Bestand ist Anfangsbestand plus Integral der Änderungsrate (zwei BE). Der höchste Stand liegt bei der Nullstelle der Rate mit Vorzeichenwechsel von plus nach minus. Die Tabellenwerte erlauben eine Schätzung mit Rechtecken oder Trapezen, die mit dem exakten Integral verglichen wird; jede weitere Teilaufgabe bringt die angegebenen Bewertungseinheiten.

a) $B(t) = 10 + \int_0^t (4 - s)\,ds = 10 + 4t - \frac{t^2}{2}$. (2 BE)
b) $B(6) = 10 + 24 - 18 = 16\,\mathrm{m}^3$. (1 BE)
c) Für $t > 4$ ist $r(t)$, also nimmt B ab. Wegen des Vorzeichenwechsels von Plus nach Minus liegt bei $t = 4$ das Maximum: $B(4) = 10 + 16 - 8 = 18\,\mathrm{m}^3$. (3 BE)

Lösung zu Aufgabe 5 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Integralfunktion ist die Stammfunktion mit Nullstelle bei 0; ihre Nullstellen findet man durch Ausklammern (zwei BE). Ihre Ableitung ist der Integrand. Die Extremstellen von J sind die Nullstellen des Integranden; ihre Art erkennt man am Vorzeichenwechsel des Integranden, ohne die zweite Ableitung zu bilden (drei BE).

a) $J(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$; Nullstellen $x = 0$ (doppelt) und $x = 3$. (2 BE)
b) $J'(x) = 3x(x - 2)$ hat Nullstellen 0 (Plus nach Minus: Hochpunkt $(0|0)$) und 2 (Minus nach Plus: Tiefpunkt $(2|-4)$). (3 BE)