Lernzettel - Stammfunktion und Integral

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Einstieg: Der Pegel am Stausee

An einem Stausee misst der Betreiber nicht den Wasserstand selbst, sondern nur die Zuflussrate der Bäche in Kubikmetern pro Stunde. Aus diesen Messwerten möchte er rekonstruieren, wie viel Wasser sich seit Mitternacht im See angesammelt hat. Das Ableiten führt von der Menge zur Änderungsrate; hier wird die Richtung umgekehrt, und genau dafür braucht man Stammfunktion und Integral. Die gleiche Frage stellt sich bei einem Auto, dessen Tacho die Geschwindigkeit zeigt, während Sie die zurückgelegte Strecke wissen wollen, oder bei einem Wasserhahn, der eine Badewanne füllt.

In der Qualifikationsphase begegnet Ihnen das Thema in jeder Abiturprüfung: im Teil ohne Hilfsmittel als reine Rechenaufgabe, im Teil mit Hilfsmitteln als Sachaufgabe zu einer Änderungsrate. Dieses Kapitel gibt Ihnen das gesamte Handwerkszeug dafür: Stammfunktionen bilden, die Probe durch Ableiten, den Hauptsatz, die Rechenregeln, Integralfunktionen, Mittelwerte und die Deutung im Sachzusammenhang.

Die Stammfunktion

Definition: Stammfunktion

Das Ableiten kennen Sie aus der Einführungsphase. In der Qualifikationsphase kehren Sie diesen Vorgang um: Gegeben ist eine Funktion f, gesucht ist eine Funktion F mit $F'(x) = f(x)$. Eine solche Funktion heißt **Stammfunktion** von f. Weil konstante Summanden beim Ableiten verschwinden, gibt es zu jeder Funktion unendlich viele Stammfunktionen: Mit F ist auch $F + C$ mit beliebigem $C \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion. Man schreibt $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ (unbestimmtes Integral).

Die wichtigsten Stammfunktionen: $f(x) = x^n$ (mit $n \neq -1$) hat $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$; $f(x) = \mathrm{e}^x$ hat $F(x) = \mathrm{e}^x$; $f(x) = \sin x$ hat $F(x) = -\cos x$; $f(x) = \cos x$ hat $F(x) = \sin x$; $f(x) = \frac{1}{x}$ hat $F(x) = \ln|x|$. Wurzeln und Brüche schreibt man zuerst als Potenzen: $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$.

Summen, Faktoren und lineare Verkettung

Definition: Probe durch Ableiten

Summanden werden einzeln integriert, konstante Faktoren bleiben stehen: Zu $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ gehört $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$. Ist die innere Funktion linear, also $f(x) = g(ax + b)$, so gilt $F(x) = \frac{1}{a}G(ax + b)$, wobei G eine Stammfunktion von g ist. Beispiel: $f(x) = (2x + 1)^3$ hat $F(x) = \frac{1}{8}(2x + 1)^4$. Machen Sie immer die **Probe durch**

Ableiten: Hier $F'(x) = \frac{1}{8} \cdot 4(2x+1)^3 \cdot 2 = (2x+1)^3$.

Das bestimmte Integral und der Hauptsatz

Definition: orientierten Flächeninhalt

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist der Grenzwert von Ober- und Untersummen und misst den **orientierten Flächeninhalt** zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über $[a;b]$. Der **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung** liefert eine einfache Berechnung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Zusätzlich besagt der Hauptsatz: Die Integralfunktion $J_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist differenzierbar mit $J_a'(x) = f(x)$. Sie ist also eine spezielle Stammfunktion, nämlich die mit $J_a(a) = 0$.

Satz: Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Ist f stetig auf $[a;b]$ und F eine Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Die Integralfunktion $J_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist differenzierbar mit $J_a' = f$.

Rechenregeln für Integrale

- $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$
- $\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx$
- $\int_a^a f\,dx = 0$ und $\int_b^a f\,dx = -\int_a^b f\,dx$

Satz: Rechenregeln

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f;\ \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g;\ \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f;\ \int_a^a f = 0;$$
$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

Beispiele Schritt für Schritt

Beispiel 1

Berechnen Sie $\int_1^3 (x^2+2)\,dx$. Eine Stammfunktion ist $F(x)=\frac{x^3}{3}+2x$. Dann ist $F(3)=9+6=15$ und $F(1)=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$, also $\int_1^3 (x^2+2)\,dx=15-\frac{7}{3}=\frac{38}{3}$.

Beispiel 2

Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x)=4x-3$ mit $F(1)=5$. Allgemein $F(x)=2x^2-3x+C$. Aus $F(1)=2-3+C=5$ folgt $C=6$, also $F(x)=2x^2-3x+6$.

Beispiel 3

Berechnen Sie $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$. Mit $F(x)=-\cos x$ folgt $F(\pi)-F(0)=1-(-1)=2$.

Beispiel 4

Bestimmen Sie $a>0$ mit $\int_0^a 3x^2\,dx=8$. Es ist $[x^3]_0^a=a^3=8$, also $a=2$.

Orientierter Flächeninhalt und Nullstellen

Liegt der Graph unterhalb der x-Achse, ist das Integral negativ. Deshalb ist $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx=0$, obwohl die Fläche nicht null ist. Möchte man den tatsächlichen Flächeninhalt, muss man an den Nullstellen in Teilintervalle zerlegen (siehe Kapitel Flächenberechnung).

So gehen Sie in einer Abituraufgabe vor

So gehst du vor

1. Funktionsterm umformen: Klammern ausmultiplizieren, Brüche und Wurzeln als Potenzen schreiben, Summanden trennen.
2. Stammfunktion Summand für Summand bilden; bei $f(ax+b)$ den Faktor $\frac{1}{a}$ ergänzen.
3. Probe durch Ableiten (im Abitur oft mit „Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist" verlangt).
4. Bei bestimmten Integralen die Grenzen einsetzen und die Differenz bilden; Zwischenergebnisse als Brüche oder exakte Werte angeben.
5. Ergebnis im Sachzusammenhang deuten: Einheit nicht vergessen, zum Beispiel Liter, Meter oder Euro.

Integral im Sachzusammenhang: Rekonstruktion von Beständen

Definition: Gesamtänderung

Ist $f(t)$ eine Änderungsrate (zum Beispiel Zufluss in Litern pro Minute, Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde, Wachstum in Zentimetern pro Jahr), dann ist $\int_a^b f(t)\,dt$ die **Gesamtänderung** im Zeitraum von a bis b. Den Bestand zur Zeit t erhält man aus dem Anfangsbestand $B(0)$ durch $B(t) = B(0) + \int_0^t f(s)\,ds$. Ist $f(t)$, nimmt der Bestand ab. Die Einheit des Integrals ist das Produkt der Einheiten von f und der Zeit: Liter pro Minute mal Minuten ergibt Liter.

Beispiel 5

Ein Radfahrer fährt mit der Geschwindigkeit $v(t) = 2 + 0{,}1t$ (in m/s). In den ersten 20 Sekunden legt er, wie man durch Integration der Geschwindigkeit über die Zeit erhält, $\int_0^{20} (2 + 0{,}1t)\,dt = [2t + 0{,}05t^2]_0^{20} = 40 + 20 = 60$ Meter zurück.

Symmetrie als Rechenhilfe

Definition: achsensymmetrisch

Ist der Graph von f **achsensymmetrisch** zur y-Achse ($f(-x) = f(x)$), dann gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$. Ist der Graph **punktsymmetrisch** zum Ursprung ($f(-x) = -f(x)$), dann gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$. Das spart Rechenarbeit, zum Beispiel $\int_{-2}^{2}(x^3 + x)\,dx = 0$, aber $\int_{-2}^{2} x^2\,dx = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$.

Mittelwert einer Funktion

Definition: Mittelwert

Der **Mittelwert** von f auf $[a;b]$ ist $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Anschaulich ist $\bar{f}$ die Höhe eines Rechtecks über $[a;b]$, das denselben Flächeninhalt hat wie die Fläche unter dem Graphen. Beispiel: $f(x) = x^2$ auf $[0;3]$ hat $\int_0^3 x^2 dx = 9$, also $\bar{f} = 3$.

Umformen, bevor man integriert

Die meisten Fehler beim Bilden von Stammfunktionen entstehen nicht beim Integrieren selbst, sondern davor: Es gibt für das Integrieren keine Produkt- oder Quotientenregel, die so glatt funktioniert wie beim Ableiten. Deshalb formt man den Term so um, dass nur noch Summen von Potenzen, Exponential- und Winkelfunktionen übrig bleiben. Klammern werden ausmultipliziert, Brüche mit Summen im Zähler werden gliedweise gekürzt, und Wurzeln werden zu Potenzen mit gebrochenem Exponenten.

Beispiel 6

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 5}{x^2}$.

Zuerst teilen Sie jeden Summanden durch x^2: $f(x) = x - \frac{2}{x} + 5x^{-2}$. Jetzt gehen Sie Summand für Summand vor: x wird zu $\frac{x^2}{2}$, $-\frac{2}{x}$ wird zu $-2\ln|x|$, und $5x^{-2}$ wird zu $5 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{5}{x}$. Also ist $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2\ln|x| - \frac{5}{x}$ für $x \neq 0$. Probe: $F'(x) = x - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} = f(x)$.

Beispiel 7

Berechnen Sie $\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}\,dx$**.**

Ausmultiplizieren ergibt $(\sqrt{x}+1)^2 = x + 2\sqrt{x} + 1$. Teilen durch x liefert $1 + 2x^{-1/2} + \frac{1}{x}$. Eine Stammfunktion ist $F(x) = x + 4\sqrt{x} + \ln x$. Einsetzen: $F(4) = 4 + 8 + \ln 4 = 12 + \ln 4$ und $F(1) = 1 + 4 + 0 = 5$. Das Integral hat den Wert $7 + \ln 4 \approx 8{,}39$.

Die Integralfunktion genauer untersucht

Die Integralfunktion $J_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ordnet jeder Obergrenze den orientierten Flächeninhalt ab a zu. Sie ist eine Stammfunktion von f und besitzt an der Stelle a eine Nullstelle. Ihre Eigenschaften lesen Sie am Graphen von f ab, ohne J_a auszurechnen: Wo $f > 0$ gilt, steigt J_a; wo f gilt, fällt J_a. An einer Nullstelle von f mit Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus hat J_a ein Maximum, bei Minus nach Plus ein Minimum. Wo f selbst ein Extremum hat, besitzt J_a einen Wendepunkt, denn $J_a'' = f'$.

Beispiel 8

Gegeben ist $J(x) = \int_0^x (t^2 - 4)\,dt$**. Untersuchen Sie** J **auf Extremstellen.**

Es ist $J'(x) = x^2 - 4$ mit den Nullstellen $x = \pm 2$. Da J' bei $x = -2$ von Plus nach Minus wechselt, liegt dort ein Hochpunkt; bei $x = 2$ wechselt J' von Minus nach Plus, dort liegt ein Tiefpunkt. Explizit ist $J(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$, also $J(2) = \frac{8}{3} - 8 = -\frac{16}{3}$ und $J(-2) = \frac{16}{3}$. Das passt zur Anschauung: Zwischen 0 und 2 liegt die Fläche unterhalb der x-Achse und zählt negativ.

Stammfunktionen mit Bedingungen

Häufig wird nicht irgendeine, sondern genau die Stammfunktion verlangt, deren Graph durch einen vorgegebenen Punkt verläuft. Dann bestimmen Sie zuerst die allgemeine Stammfunktion mit dem Parameter C und setzen anschließend die Bedingung ein. Dieselbe Technik liefert in der Physik aus der Geschwindigkeit den Ort, sobald der Startort bekannt ist.

Beispiel 9

Der Graph von F **mit** $F'(x) = 3\mathrm{e}^x - 2x$ **geht durch** $P(0|4)$**. Bestimmen Sie** F**.**

Allgemein gilt $F(x) = 3\mathrm{e}^x - x^2 + C$. Aus $F(0) = 3 + C = 4$ folgt $C = 1$, also $F(x) = 3\mathrm{e}^x - x^2 + 1$. Probe: $F'(x) = 3\mathrm{e}^x - 2x$ und $F(0) = 3 - 0 + 1 = 4$.

Wusstest du? Das lange S

Das Integralzeichen $\int$ ist ein stilisiertes langes S für „Summe“. Gottfried Wilhelm Leibniz führte es Ende des 17. Jahrhunderts ein, weil er sich das Integral als Summe unendlich vieler, unendlich schmaler Rechtecke vorstellte. Zeitgleich erkannten er und Isaac Newton unabhängig voneinander den Zusammenhang zwischen Ableiten und Integrieren, den wir heute als Hauptsatz kennen. Im Alltag steckt dieser Gedanke in jedem Fahrtenschreiber, der aus Geschwindigkeitsdaten Kilometer berechnet.

Vom Rechteck zum Integral: Ober- und Untersumme

Bevor es den Hauptsatz gab, wurde der Inhalt der Fläche unter einem Graphen durch Rechtecke angenähert. Man teilt das Intervall $[a;b]$ in n gleich breite Streifen der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Bei einer monoton steigenden Funktion liefern die linken Randwerte eine **Untersumme**, die rechten eine **Obersumme**; bei einer fallenden Funktion ist es umgekehrt. Das Integral liegt immer zwischen beiden Werten, und für wachsendes n rücken beide zusammen. In Abituraufgaben kommt das vor, wenn nur eine Messtabelle gegeben ist: Dann sollen Sie eine Änderungsrate über die Zeit aufsummieren und den Unterschied zum exakten Wert beurteilen.

Beispiel 10

Für $f(x) = x^2$ auf $[0;2]$ sollen Unter- und Obersumme mit $n = 4$ Streifen bestimmt werden.

Die Streifenbreite ist $\Delta x = 0{,}5$. Die Funktion steigt, also nimmt die Untersumme die linken Randwerte $f(0) = 0$, $f(0{,}5) = 0{,}25$, $f(1) = 1$, $f(1{,}5) = 2{,}25$: $U_4 = 0{,}5 \cdot (0 + 0{,}25 + 1 + 2{,}25) = 1{,}75$. Die Obersumme nimmt die rechten Randwerte $0{,}25;\ 1;\ 2{,}25;\ 4$: $O_4 = 0{,}5 \cdot 7{,}5 = 3{,}75$. Das exakte Integral $\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$ liegt dazwischen. Der Abstand $O_4 - U_4 = 2$ schrumpft beim Verdoppeln von n auf die Hälfte, weil sich nur die Rechtecke an den Rändern unterscheiden.

Zerlegung an den Nullstellen

Möchten Sie den Inhalt der Fläche zwischen Graph und x-Achse bestimmen und der Graph wechselt dabei das Vorzeichen, dann reicht ein einzelnes Integral nicht aus. Sie bestimmen zuerst die Nullstellen von f im Intervall, zerlegen dort nach der Intervalladditivität und bilden von jedem Teilintegral den Betrag. Ein Blick auf den Graphen oder eine kleine Wertetabelle zeigt, welche Teile oberhalb und welche unterhalb der Achse liegen.

Beispiel 11

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von

$f(x) = x^3 - 4x$ und der x-Achse über $[-2; 2]$.

Aus $x(x^2 - 4) = 0$ folgen die Nullstellen -2, 0 und 2. Mit $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2$ ist $\int_{-2}^{0} f = F(0) - F(-2) = 0 - (4 - 8) = 4$ und $\int_{0}^{2} f = F(2) - F(0) = (4 - 8) - 0 = -4$. Das gesamte Integral ist 0 (der Graph ist punktsymmetrisch), der Flächeninhalt aber $|4| + |-4| = 8$. Genau diesen Unterschied zwischen „Integral“ und „Flächeninhalt“ prüft das Abitur besonders gern.

Antwortsätze im Sachzusammenhang

In Aufgaben mit Änderungsraten bewerten die Prüfer nicht nur die Rechnung, sondern auch die Deutung. Ein vollständiger Antwortsatz nennt die Größe, den Zeitraum und die Einheit. Aus $\int_{2}^{6} z(t)\,dt = 18$ wird zum Beispiel: „Zwischen der zweiten und der sechsten Stunde fließen insgesamt 18 Kubikmeter Wasser in das Becken.“ Bei einer Differenz aus Zu- und Abfluss formulieren Sie vorsichtiger: „Der Bestand nimmt in diesem Zeitraum um 18 Kubikmeter zu.“ Beachten Sie dabei zwei Fallen. Erstens ist $\int_{a}^{b} f$ bei negativer Änderungsrate selbst negativ und bedeutet eine Abnahme. Zweitens ist die Gesamtänderung nicht der Bestand: Der Anfangsbestand muss hinzugezählt werden, bevor man etwa fragt, ob ein Behälter überläuft.

Beispiel 12

Ein Bagger hebt eine Baugrube aus. Die Aushubrate beträgt $a(t) = 12 - t$ in Kubikmetern pro Stunde für $0 \le t \le 12$. Wie viel wird in den ersten acht Stunden ausgehoben, und wann ist die Rate null?

Das Integral $\int_{0}^{8} (12 - t)\,dt = \left[12t - \frac{t^2}{2}\right]_{0}^{8} = 96 - 32 = 64$ liefert die Aushubmenge: In den ersten acht Stunden werden $64\,\mathrm{m}^3$ ausgehoben. Die Rate ist bei $t = 12$ null, danach würde das Modell negative Werte liefern und wäre nicht mehr sinnvoll. Die Gesamtmenge bis $t = 12$ beträgt $\left[12t - \frac{t^2}{2}\right]_{0}^{12} = 72\,\mathrm{m}^3$; in den letzten vier Stunden sind es nur noch $8\,\mathrm{m}^3$.

Mittelwert und Mittelwertsatz

Der Mittelwert $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ beantwortet die Frage, welche konstante Rate in demselben Zeitraum dieselbe Gesamtänderung liefern würde. Das ist in der Praxis eine beliebte Frage: die durchschnittliche Leistung eines Geräts, die mittlere Temperatur eines Tages oder die durchschnittliche Zuflussrate eines Baches. Eine stetige Funktion nimmt ihren Mittelwert auf dem Intervall mindestens einmal an. Dieser Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt aus dem Zwischenwertsatz: Zwischen dem kleinsten und dem größten Funktionswert liegt jeder Wert, auch der Mittelwert.

Beispiel 13

Die Tagestemperatur wird durch $T(t) = 12 + 8\sin\left(\frac{\pi}{12}(t-9)\right)$ in Grad Celsius modelliert (t in Stunden seit Mitternacht). Bestimmen Sie die mittlere Temperatur zwischen 9 Uhr und 21 Uhr.

Die Stammfunktion ist $12t - \frac{96}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{12}(t-9)\right)$. Zwischen $t = 9$ und $t = 21$ ergibt sich $\int_9^{21} T\,dt = 144 - \frac{96}{\pi}\left(\cos\pi - \cos 0\right) = 144 + \frac{192}{\pi} \approx 205{,}1$. Geteilt durch die Länge 12 des Zeitraums erhält man $\bar{T} \approx 17{,}1\,^\circ\mathrm{C}$. Dieser Wert liegt über dem Tagesmittel von $12\,^\circ\mathrm{C}$, weil im betrachteten Zeitraum die warme Halbwelle der Sinuskurve liegt.

Beispiel 14

Zeigen Sie, dass $\int_0^2 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx$ mit der Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ berechnet werden kann, und werten Sie das Integral aus.

Mit der Kettenregel gilt $F'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x = x\,\mathrm{e}^{x^2}$, die Probe stimmt also. Dann ist $\int_0^2 x\,\mathrm{e}^{x^2}dx = F(2) - F(0) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^4 - \frac{1}{2} \approx 26{,}8$. Merkregel: Steht neben der Verkettung $g(h(x))$ genau die Ableitung der inneren Funktion $h'(x)$, dann entsteht die Stammfunktion aus der Stammfunktion der äußeren Funktion; fehlt nur ein konstanter Faktor, gleichen Sie ihn aus.

Typische Aufgabenformen im Überblick

- **Rechenaufgabe ohne Hilfsmittel:** Stammfunktion bilden, Integral exakt berechnen, Parameter aus einer Integralgleichung bestimmen.
- **Nachweisaufgabe:** „Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist“ verlangt ausschließlich das Ableiten und den Vergleich mit f.
- **Graphische Aufgabe:** Aus dem Graphen von f sollen Eigenschaften der Integralfunktion abgelesen werden (Monotonie, Extrema, Wendepunkte).
- **Sachaufgabe:** Eine Änderungsrate wird gegeben, gefragt sind Gesamtänderung, Bestand, Zeitpunkt des Höchststandes und die Deutung im Kontext.

Kontrollfragen vor der Abgabe

- Stimmt die Probe $F' = f$? Wurde bei linearer Verkettung der Faktor $\frac{1}{a}$ ergänzt?
- Wurde beim bestimmten Integral $F(b) - F(a)$ mit Klammern berechnet?
- Passt die Einheit des Ergebnisses zum Sachzusammenhang, und ist der Antwortsatz vollständig („Im Zeitraum von … bis … ändert sich der Bestand um …“)?
- Liegt der Graph im Intervall teilweise unterhalb der x-Achse? Dann ist das Integral keine Flächenangabe.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Eine Stammfunktion F von f erfüllt $F'(x) = f(x)$; sie ist nur bis auf eine additive Konstante C bestimmt, zu jeder Funktion gehört also eine ganze Schar von Stammfunktionen.

- Grundstammfunktionen: $x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$, $\frac{1}{x} \to \ln|x|$, $\mathrm{e}^x \to \mathrm{e}^x$, $\sin x \to -\cos x$, $\cos x \to \sin x$; Wurzeln und Brüche vorher als Potenzen schreiben.
- Lineare Verkettung: Zu $f(ax+b)$ gehört die Stammfunktion $\frac{1}{a}F(ax+b)$; jede Stammfunktion wird durch Ableiten (Probe) kontrolliert.
- Hauptsatz: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$; die Integralfunktion $J_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ hat die Ableitung $J_a' = f$ und die Nullstelle $x = a$.
- Das Integral ist ein orientierter Flächeninhalt: Flächen unterhalb der x-Achse zählen negativ, für echte Flächeninhalte muss man an den Nullstellen zerlegen.
- Rechenregeln: Linearität, Intervalladditivität $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$, Vertauschen der Grenzen ändert das Vorzeichen, $\int_a^a f = 0$.
- Im Sachzusammenhang ist $\int_a^b f(t)\,dt$ die Gesamtänderung einer Größe mit Änderungsrate f; der Bestand ist $B(t) = B(0) + \int_0^t f(s)\,ds$.
- Der Mittelwert von f auf $[a;b]$ ist $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$; Symmetrie des Integranden spart Rechenarbeit.

Achtung: Typische Fehler

- Die Konstante C vergessen oder beim Einsetzen der Grenzen mitnehmen (sie hebt sich beim bestimmten Integral auf).
- Die Kettenregel rückwärts vergessen: $\int (3x+1)^2 dx \neq \frac{(3x+1)^3}{3}$, richtig ist $\frac{(3x+1)^3}{9}$.
- Beim Einsetzen der unteren Grenze das Vorzeichen verlieren: Es heißt $F(b) - F(a)$, also Klammern setzen.
- $\int \frac{1}{x}\,dx$ mit der Potenzregel versuchen: Für $n = -1$ gilt die Regel nicht, hier gilt $\ln|x|$.

Ottos Tipp: Schreibe die Stammfunktion erst auf, leite sie zur Probe ab und setze dann erst die Grenzen ein. So findest du Fehler sofort!

Ottos Tipp

Prüfen Sie jede Stammfunktion durch Ableiten. Wenn $F'(x) = f(x)$ herauskommt, ist alles richtig, und die Konstante C fällt beim bestimmten Integral ohnehin weg.