Arbeitsblatt - Stammfunktion und Integral

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 21

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Stammfunktionen bilden

Bilden Sie zu jeder Funktion eine Stammfunktion. Schreiben Sie Brüche und Wurzeln zuerst als Potenzen und führen Sie anschließend die Probe durch Ableiten durch.

a) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$
b) $f(x) = 5x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 7$
c) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 3x$
d) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{6}{x^3}$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Lineare Verkettung

Bei $f(ax+b)$ gehört der Faktor $\frac{1}{a}$ zur Stammfunktion. Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion und prüfen Sie durch Ableiten.

a) $f(x) = (2x+1)^3$
b) $f(x) = \mathrm{e}^{3x-1}$
c) $f(x) = \cos(2x) + \sin(x)$
d) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ für $x > -1{,}5$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Zeigen, dass F eine Stammfunktion ist

Im Abitur wird oft verlangt, durch Ableiten nachzuweisen, dass eine gegebene Funktion Stammfunktion ist. Die Produktregel ist hier das wichtigste Werkzeug.

a) Zeigen Sie: $F(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$.
b) Zeigen Sie: $F(x) = x\ln x - x$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = \ln x$ für $x > 0$.
c) Berechnen Sie damit $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,dx$.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Bestimmte Integrale ohne Hilfsmittel

Berechnen Sie die Integrale exakt. Geben Sie die Stammfunktion an und setzen Sie die Grenzen in Klammern ein.

a) $\int_0^3 (x^2 + 1)\,dx$
b) $\int_{-1}^2 (x^3 - x)\,dx$
c) $\int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx$
d) $\int_0^9 \sqrt{x}\,dx$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Stammfunktion mit Bedingung

Bestimmen Sie die Stammfunktion, deren Graph durch den angegebenen Punkt verläuft. Gehen Sie in zwei Schritten vor: allgemeine Stammfunktion, dann C bestimmen.

a) $f(x) = 6x^2 - 2x$, $F(1) = 3$
b) $f(x) = 4x - 3$, $F(1) = 5$
c) $f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}$ für $x > 0$, $F(1) = \mathrm{e}$
d) $f(x) = \cos x$, der Graph von F geht durch $P(\pi|2)$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Rechenregeln für Integrale

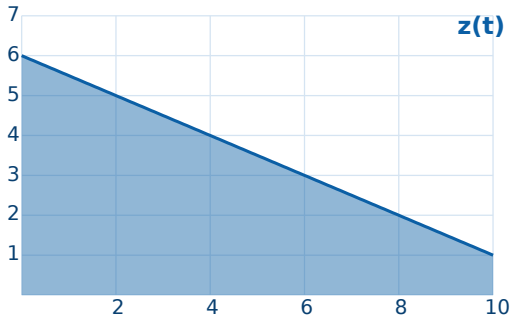
Von zwei Funktionen f und g sind bekannt: $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$, $\int_2^5 f(x)\,dx = -1$ und $\int_0^2 g(x)\,dx = 4$.

a) Berechnen Sie $\int_0^5 f(x)\,dx$.
b) Berechnen Sie $\int_5^2 f(x)\,dx$.
c) Berechnen Sie $\int_0^2 \big(2f(x) - g(x)\big)\,dx$.
d) Berechnen Sie $\int_0^2 \big(f(x) + 1\big)\,dx$ und $\int_2^2 g(x)\,dx$.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Der Regenwassertank

Nach einem Gewitter fließt Regenwasser vom Dach in den Tank eines Gartenbesitzers. Die Zuflussrate beträgt $z(t) = 6 - 0{,}5t$ (in Litern pro Minute, $0 \le t \le 10$, t in Minuten). Zu Beginn befinden sich 40 Liter im Tank.



a) Erklären Sie, was der Term $\int_0^{10} z(t)\,dt$ bedeutet, und berechnen Sie ihn.
b) Geben Sie die Funktion B an, die den Bestand im Tank beschreibt, und berechnen Sie $B(10)$.
c) Der Tank fasst 100 Liter. Wird er innerhalb der 10 Minuten voll?
d) Berechnen Sie die mittlere Zuflussrate in den 10 Minuten und deuten Sie sie an der Abbildung.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Das Fahrrad

Eine Radfahrerin beschleunigt auf gerader Strecke. Ihre Geschwindigkeit beträgt $v(t) = 0{,}6t$ (in m/s, t in Sekunden) für $0 \le t \le 10$ und danach konstant 6 m/s.

a) Berechnen Sie die in den ersten 10 Sekunden zurückgelegte Strecke.
b) Wie weit ist sie nach 25 Sekunden insgesamt gekommen?
c) Nach wie vielen Sekunden hat sie 100 m zurückgelegt?
d) Welche mittlere Geschwindigkeit hat sie in den ersten 25 Sekunden?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Die Schneehöhe

Auf einer Wetterstation wird die Änderungsrate der Schneehöhe (in cm pro Stunde) bei einem Wintereinbruch modelliert durch $s(t) = 0{,}3t - 0{,}03t^2$ für $0 \le t \le 10$ (Zeit in Stunden ab Schneefallbeginn). Zu Beginn liegen 12 cm Schnee.

a) Zu welchem Zeitpunkt ist die Änderungsrate am größten? Wie groß ist sie dann?
b) Bestimmen Sie die Schneehöhe $H(t)$ und berechnen Sie $H(10)$.
c) Zeigen Sie, dass es nach 10 Stunden nicht mehr schneit, und begründen Sie, dass H auf dem Intervall dort sein Maximum hat.
d) Um wie viel Zentimeter wächst der Schnee zwischen der 4. und der 8. Stunde?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Die mittlere Heizleistung

Die Leistungsaufnahme einer Wärmepumpe im Einfamilienhaus wird im Tagesverlauf durch $P(t) = 2 + 0{,}5\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ (in kW, t in Stunden seit Mitternacht, $0 \le t \le 24$) beschrieben.

a) Berechnen Sie den Energieverbrauch $E = \int_0^{24} P(t)\,dt$ in kWh.
b) Welchen Wert hat die mittlere Leistung über den Tag?
c) Wie hoch sind die Stromkosten für einen Tag bei *0{,}35\,€* pro kWh?
d) Berechnen Sie den Verbrauch zwischen $t = 0$ und $t = 12$ und vergleichen Sie ihn mit dem zweiten Halbtag.

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Symmetrie nutzen

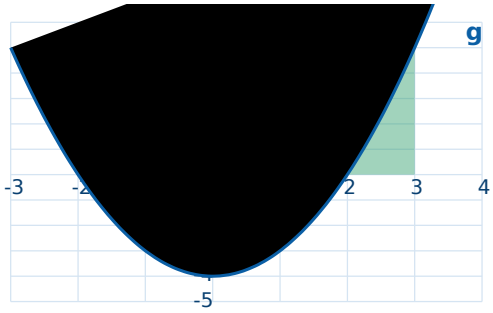
Prüfen Sie zuerst, ob der Graph des Integranden symmetrisch ist, und nutzen Sie das zum Rechnen.

a) $\int_{-2}^{2} (x^3 + x)\,dx$
b) $\int_{-2}^{2} x^2\,dx$
c) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx$ und $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx$
d) $\int_{-3}^{3} (x^4 - 2x^2 + x)\,dx$

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Die Integralfunktion

Gegeben sind $g(t) = t^2 - 4$ und die Integralfunktion $J(x) = \int_0^x g(t)\,dt$. Der Graph von g ist abgebildet; die Fläche links der 2 liegt unterhalb, rechts davon oberhalb der Achse.



a) Bestimmen Sie $J(x)$ und zeigen Sie, dass $J' = g$ gilt.
b) Bestimmen Sie die Nullstellen von J.
c) Bestimmen Sie Lage und Art der Extremstellen von J.
d) Berechnen Sie $J(3)$ und erklären Sie das Vorzeichen mit Hilfe der Abbildung.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Parameter bestimmen

Bestimmen Sie den Parameter so, dass die Gleichung erfüllt ist. Rechnen Sie das Integral zuerst allgemein aus.

a) $\int_0^a (2x + 1)\,dx = 12$ mit $a > 0$

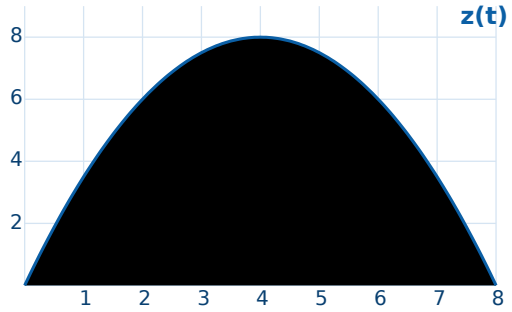
b) $\int_0^2 kx^2\,dx = 8$
c) $\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = 2$ mit $b > 1$
d) $\int_0^3 (x^2 - kx)\,dx = 0$

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Zufluss und Abfluss im Rückhaltebecken

Ein Rückhaltebecken wird bei Starkregen von zwei Bächen gespeist und über eine Schleuse entleert. Die Zuflussrate ist $z(t) = -0{,}5t^2 + 4t$ (in m^3 pro Stunde), die Abflussrate der Schleuse konstant $6\,\mathrm{m}^3$ pro Stunde ($0 \le t \le 8$). Anfangs sind $10\,\mathrm{m}^3$ Wasser im Becken.

Zeit t in h	0	2	4	6	8
$z(t)$ in m^3/h	0	6	8	6	0



a) Bestätigen Sie die Tabellenwerte für $t = 2$ und $t = 6$.
b) Berechnen Sie die gesamte Zuflussmenge in den 8 Stunden.
c) Bestimmen Sie die Funktion B, die den Wasserbestand beschreibt, und berechnen Sie $B(8)$.
d) Zu welchen Zeitpunkten ist die Änderungsrate des Bestands null? Wann ist der Bestand am größten?
e) In welchen Zeiträumen nimmt der Bestand ab, und wie klein wird er?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Der Bremsvorgang

Ein Regionalzug fährt mit 30 m/s und beginnt bei $t = 0$ zu bremsen. Seine Geschwindigkeit beträgt $v(t) = 30 - 1{,}5t$ (in m/s, t in Sekunden) bis zum Stillstand.

a) Nach wie vielen Sekunden steht der Zug?
b) Berechnen Sie den Bremsweg mit dem Integral.
c) Ein Bahnübergang liegt 280 m vor dem Zug, als er zu bremsen beginnt. Schafft er es, davor zu halten? Mit welcher Geschwindigkeit erreicht er ihn gegebenenfalls?
d) Für welchen Wert b der Bremsverzögerung (Ansatz $v(t) = 30 - bt$) beträgt der Bremsweg genau 250 m?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Näherung durch Tabellenwerte

Bei einer Wanderung wurde die Steiggeschwindigkeit der Gruppe (Höhenmeter pro Stunde) stündlich gemessen. Modelliert wird sie durch $h'(t) = 400\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ für $0 \le t \le 4$.

t in h	0	1	2	3	4
$h'(t)$ in m/h	400	327	268	220	180

a) Schätzen Sie den Höhengewinn in den 4 Stunden mit einer Untersumme (Rechtecke der Breite 1 h).
b) Schätzen Sie ihn mit der Obersumme.
c) Berechnen Sie den exakten Höhengewinn $\int_0^4 400\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}\,dt$.
d) Prüfen Sie, dass der exakte Wert zwischen Unter- und Obersumme liegt, und erklären Sie, warum.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Wahr oder falsch?

Entscheiden Sie bei jeder Aussage, ob sie für alle stetigen Funktionen f auf $[a;b]$ richtig ist, und begründen Sie Ihre Antwort (bei „falsch“ mit einem Gegenbeispiel).

a) Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist stets der Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse.
b) Hat f eine Stammfunktion F, dann hat f unendlich viele Stammfunktionen.
c) Gilt $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a;b]$.
d) Ist F Stammfunktion von f, dann ist F^2 Stammfunktion von f^2.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Eine Schar von Parabeln

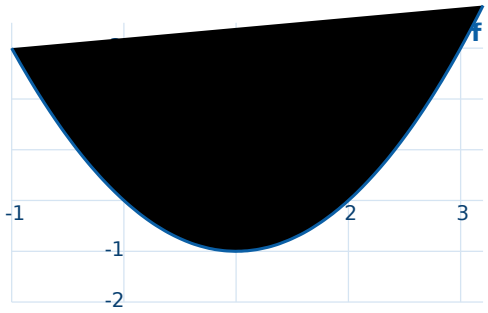
Gegeben ist die Schar $f_k(x) = x^2 - kx$ mit $k > 0$. Der Graph von f_k schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f_k.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $A(k)$ der eingeschlossenen Fläche in Abhängigkeit von k.
c) Für welches k beträgt der Flächeninhalt 36?
d) Für welches k ist $\int_0^3 f_k(x)\,dx = 0$? Deuten Sie das Ergebnis.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Fläche und Integral vergleichen

Die Abbildung zeigt den Graphen von $f(x) = x^2 - 2x$ mit der markierten Fläche zwischen den Nullstellen.



a) Berechnen Sie $\int_0^2 f(x)\,dx$ und deuten Sie das Vorzeichen.
b) Berechnen Sie $\int_0^3 f(x)\,dx$. Ist das der Flächeninhalt der Fläche zwischen Graph und x-Achse über $[0;3]$?
c) Berechnen Sie diesen Flächeninhalt richtig.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Der Einlass der Freilichtbühne

Der Einlass zu einem Open-Air-Konzert wird durch die Besucherrate $r(t) = -t^2 + 12t$ (Besucher pro Minute, $0 \le t \le 12$, t in Minuten nach Öffnung) modelliert. Bei Öffnung sind keine Besucher auf dem Gelände.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Besucher, die in den ersten 12 Minuten eingelassen werden.
b) Nach wie vielen Minuten ist die Rate am größten? Wie viele Personen kommen dann pro Minute?
c) Berechnen Sie den Anteil der Besucher, die in den ersten 6 Minuten eingelassen werden, und erklären Sie das Ergebnis.
d) Begründen Sie, warum man bei einer Besucherrate nicht einfach „Rate mal Zeit“ rechnen darf.

Aufgabe 21

Aufgabe 21 – Das Wasserwerk

Ein Wasserwerk speichert Trinkwasser in einem Hochbehälter. Die Zulaufrate (in m^3 pro Stunde) wird für einen Tag ($0 \le t \le 24$, t in Stunden seit Mitternacht) durch $z(t) = 120 + 80\sin\!\left(\frac{\pi}{12}(t-6)\right)$ modelliert, die Entnahme der Stadt durch $e(t) = 150$ (konstant). Zu Beginn sind $900\,\mathrm{m}^3$ im Behälter; er fasst $1\,500\,\mathrm{m}^3$.

a) Berechnen Sie die tägliche Zulaufmenge und die tägliche Entnahme. Bleibt der Bestand über den Tag konstant?
b) Bestimmen Sie die Änderungsrate $B'(t) = z(t) - e(t)$ des Bestands und ihre Nullstellen im Intervall.
c) Geben Sie den Bestand $B(t)$ an.
d) Berechnen Sie $B(12)$ und $B(24)$ und beurteilen Sie, ob der Behälter im Laufe des Tages überläuft oder leerläuft.