Lösungen - Stammfunktion und Integral

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Brüche und Wurzeln werden zuerst als Potenzen geschrieben. Dann wendet man die Potenzregel rückwärts an: Exponent um eins erhöhen und durch den neuen Exponenten teilen. Die Probe durch Ableiten zeigt, ob die Stammfunktion stimmt.

a) $F(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$. Probe: $F'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$.

b) $F(x) = x^5 - \frac{x^3}{6} + 7x$, Summand für Summand.

c) $F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{2}x^2$, denn $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ hat die Stammfunktion $\frac{x^{-1}}{-1}$.

d) $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{x^2}$, denn $-6x^{-3}$ wird zu $-6 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} = 3x^{-2}$.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Bei einer linearen Verkettung $f(ax+b)$ bildet man die Stammfunktion der äußeren Funktion und teilt durch die innere Ableitung a. Die Probe mit der Kettenregel liefert den Faktor a zurück, der sich mit $\frac{1}{a}$ aufhebt.

a) $F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^4$. Probe: $F'(x) = \frac{1}{8} \cdot 4(2x+1)^3 \cdot 2 = (2x+1)^3$.

b) $F(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-1}$. Probe: $F'(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-1} \cdot 3 = f(x)$.

c) $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \cos x$. Probe: $F'(x) = \cos(2x) + \sin x$.

d) $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2x+3)$. Probe: $F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x+3} = f(x)$.

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg: Man leitet die gegebene Funktion F mit der Produktregel ab und fasst zusammen. Ist das Ergebnis genau f, ist F eine Stammfunktion. Dieser Nachweis ersetzt im Abitur das Integrieren schwieriger Funktionen.

a) Produktregel: $F'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x = f(x)$.

b) $F'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.

c) $F(1) - F(0) = 0 - (-1) = 1$.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Für jedes bestimmte Integral wird eine Stammfunktion angegeben, dann setzt man obere und untere Grenze ein und bildet die Differenz. Klammern um die eingesetzten Werte vermeiden Vorzeichenfehler, besonders bei negativen Grenzen.

a) $\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^3 = 9 + 3 - 0 = 12$.

b) $\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 = (4-2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$.

c) $\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$.
d) $\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^9 = \frac{2}{3} \cdot 27 = 18$.

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Zuerst wird die allgemeine Stammfunktion mit der Konstanten C gebildet. Setzt man den gegebenen Punkt ein, erhält man eine Gleichung für C. Die gesuchte Stammfunktion entsteht durch Einsetzen dieses Werts.

a) $F(x) = 2x^3 - x^2 + C$; $F(1) = 1 + C = 3$, also $C = 2$ und $F(x) = 2x^3 - x^2 + 2$.
b) $F(x) = 2x^2 - 3x + C$; $F(1) = -1 + C = 5$, also $C = 6$.
c) $F(x) = \mathrm{e}^x + \ln x + C$; $F(1) = \mathrm{e} + 0 + C = \mathrm{e}$, also $C = 0$ und $F(x) = \mathrm{e}^x + \ln x$.
d) $F(x) = \sin x + C$; $F(\pi) = 0 + C = 2$, also $F(x) = \sin x + 2$.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Integrale über aneinandergrenzende Intervalle werden addiert, Vertauschen der Grenzen ändert das Vorzeichen, und Faktoren sowie Summen dürfen aus dem Integral herausgezogen werden. Mit diesen Regeln kombiniert man die bekannten Werte.

a) Intervalladditivität: $3 + (-1) = 2$.
b) Vertauschen der Grenzen ändert das Vorzeichen: $\int_5^2 f = -\int_2^5 f = 1$.
c) Linearität: $2 \cdot 3 - 4 = 2$.
d) $\int_0^2 f + \int_0^2 1\,dx = 3 + 2 = 5$; außerdem ist $\int_2^2 g(x)\,dx = 0$.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: Die Wassermenge im Tank ist Anfangsmenge plus Integral der Zuflussrate. Der höchste Stand liegt bei der Nullstelle der Rate. Für einen gesuchten Zeitpunkt setzt man die Bestandsfunktion gleich dem Zielwert.

a) Das Integral ist die Zuflussmenge in den ersten 10 Minuten:
$\left[6t - 0{,}25t^2\right]_0^{10} = 60 - 25 = 35$ Liter.
b) $B(t) = 40 + 6t - 0{,}25t^2$, also $B(10) = 40 + 60 - 25 = 75$ Liter.
c) Nein: $B(10) = 75$. Da $z(t) > 0$ für alle $t \in [0;10]$, steigt B streng monoton; das Maximum von 75 Liter wird am Ende erreicht.
d) $\bar{z} = \frac{1}{10} \cdot 35 = 3{,}5$ Liter pro Minute. Das Rechteck der Höhe $3{,}5$ über $[0;10]$ hat den gleichen Flächeninhalt wie die Fläche unter dem Graphen.

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: Die Strecke ist das Integral der Geschwindigkeit. Bei abschnittsweise definierter Geschwindigkeit wird für jeden Abschnitt getrennt integriert und addiert. Die mittlere Geschwindigkeit ist die Gesamtstrecke geteilt durch die Gesamtzeit.

a) $s = \int_0^{10} 0{,}6t\,dt = \left[0{,}3t^2\right]_0^{10} = 30$ m.

b) Nach 10 s sind es 30 m; dann folgen 15 s mit 6 m/s, also $15 \cdot 6 = 90$ m. Insgesamt 120 m.
c) Nach 10 s sind es 30 m, es fehlen noch 70 m bei 6 m/s, das sind $\frac{70}{6} \approx 11{,}7$ s. Also nach etwa $21{,}7$ s.
d) $\bar{v} = \frac{120}{25} = 4{,}80$ m/s, das sind $17{,}3$ km/h.

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Die Schneehöhe ergibt sich aus dem Integral der Änderungsrate. Wo die Rate am größten ist, fällt der meiste Schnee. Die gesamte Zunahme ist das Integral über die ganze Schneefallzeit.

a) $s'(t) = 0{,}3 - 0{,}06t = 0 \Rightarrow t = 5$; $s(5) = 1{,}5 - 0{,}75 = 0{,}75$ cm/h (Scheitel der nach unten geöffneten Parabel).
b) $H(t) = 12 + 0{,}15t^2 - 0{,}01t^3$; $H(10) = 12 + 15 - 10 = 17$ cm.
c) $s(10) = 3 - 3 = 0$. Davor gilt $s > 0$, die Höhe steigt also bis $t = 10$ und $H(10) = 17$ cm ist das Maximum.
d) $H(8) - H(4) = (12 + 9{,}6 - 5{,}12) - (12 + 2{,}4 - 0{,}64) = 16{,}48 - 13{,}76 = 2{,}72$ cm.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Die Energie ist das Integral der Leistung über die Zeit. Der Sinusanteil hebt sich über einen vollen Tag auf, sodass die mittlere Leistung dem konstanten Anteil entspricht. Teilintegrale zeigen die Verteilung über den Tag.

a) Stammfunktion: $2t - \frac{6}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$. Der Kosinus-Term hat bei 0 und 24 den gleichen Wert, also $E = 2 \cdot 24 = 48$ kWh.
b) $\bar{P} = \frac{48}{24} = 2$ kW; der Sinusanteil mittelt sich über eine volle Periode (24 h) zu null.
c) *48\cdot0{,}35=16{,}80\,€*.
d) Erste Hälfte: $24 + \frac{6}{\pi} \cdot 2 = 24 + \frac{12}{\pi} \approx 27{,}82$ kWh; zweite Hälfte $24 - \frac{12}{\pi} \approx 20{,}18$ kWh. Tagsüber wird mehr verbraucht, nachts weniger.

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: Vor dem Rechnen prüft man die Symmetrie: Bei punktsymmetrischen Funktionen über symmetrischen Intervallen ist das Integral null, bei achsensymmetrischen genügt das doppelte Integral über die rechte Hälfte. Das spart viel Rechenarbeit.

a) Ungerade Funktion (punktsymmetrisch zum Ursprung): Das Integral ist 0.
b) Gerade Funktion: $2\int_0^2 x^2 dx = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$.
c) $\sin$ ist ungerade, also 0. $\cos$ ist gerade: $2\int_0^{\pi} \cos x\,dx = 2[\sin x]_0^{\pi} = 0$.
d) Nur der gerade Teil zählt: $2\int_0^3 (x^4 - 2x^2)\,dx = 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^3 = 2\left(\frac{243}{5} - 18\right) = \frac{306}{5}$.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Die Integralfunktion ist eine Stammfunktion des Integranden mit

Nullstelle an der unteren Grenze. Ihre Extremstellen liegen bei den Nullstellen des Integranden mit Vorzeichenwechsel. Der Graph wird aus den Flächenbilanzen gedeutet.

a) $J(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$, $J'(x) = x^2 - 4 = g(x)$.

b) $J(x) = x\left(\frac{x^2}{3} - 4\right) = 0$ für $x = 0$ oder $x^2 = 12$, also $x = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3{,}46$.

c) $J' = g$ hat Nullstellen bei ± 2 mit Vorzeichenwechsel. Bei $x = -2$: Plus nach Minus, Hochpunkt; bei $x = 2$: Minus nach Plus, Tiefpunkt.

d) $J(3) = 9 - 12 = -3$. Die negative Fläche zwischen 0 und 2 (Betrag $\frac{16}{3}$) wird von der positiven Fläche zwischen 2 und 3 (Betrag $\frac{7}{3}$) nicht ausgeglichen.

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Man berechnet das Integral allgemein, sodass der Parameter im Ergebnis steht. Dann setzt man das Ergebnis gleich dem vorgegebenen Wert und löst die entstehende Gleichung nach dem Parameter auf. Unzulässige Lösungen werden verworfen.

a) $\left[x^2 + x\right]_0^a = a^2 + a = 12 \Rightarrow a = 3$ (die Lösung $a = -4$ entfällt).

b) $k \cdot \frac{8}{3} = 8 \Rightarrow k = 3$.

c) $\left[\ln x\right]_1^b = \ln b = 2 \Rightarrow b = \mathrm{e}^2 \approx 7{,}39$.

d) $9 - \frac{9}{2}k = 0 \Rightarrow k = 2$.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Die Bestandsänderung ist Zufluss minus Abfluss. Das Integral dieser Differenz plus Anfangsbestand ergibt den Inhalt des Beckens. Der höchste Stand liegt dort, wo Zufluss und Abfluss gleich groß sind.

a) $z(2) = -2 + 8 = 6$; $z(6) = -18 + 24 = 6$. Beide Werte stimmen.

b) $\int_0^8 (-0{,}5t^2 + 4t)\,dt = \left[-\frac{t^3}{6} + 2t^2\right]_0^8 = -\frac{256}{3} + 128 = \frac{128}{3} \approx 42{,}67\,\mathrm{m}^3$.

c) $B(t) = 10 + \int_0^t (z(s) - 6)\,ds = 10 - \frac{t^3}{6} + 2t^2 - 6t$;
$B(8) = 10 - \frac{256}{3} + 128 - 48 = \frac{14}{3} \approx 4{,}67\,\mathrm{m}^3$.

d) $B'(t) = z(t) - 6 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow t = 2$ oder $t = 6$. Es gilt $B(0) = B(6) = 10$, $B(2) = B(8) = \frac{14}{3}$. Der größte Bestand ist $10\,\mathrm{m}^3$, er wird zu Beginn und bei $t = 6$ erreicht.

e) Für t und $t > 6$ ist $z(t)$, der Bestand sinkt: zwischen 0 und 2 h sowie zwischen 6 und 8 h. Er fällt dabei jeweils auf $\frac{14}{3} \approx 4{,}67\,\mathrm{m}^3$.

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Der Zug steht, wenn die Geschwindigkeit null ist. Der Bremsweg ist das Integral der Geschwindigkeit bis zu diesem Zeitpunkt. Weitere Fragen nach Teilstrecken werden mit Teilintegralen beantwortet.

a) $30 - 1{,}5t = 0 \Rightarrow t = 20$ s.

b) $s = \int_0^{20} (30 - 1{,}5t)\,dt = \left[30t - 0{,}75t^2\right]_0^{20} = 600 - 300 = 300$ m.
c) Nein, der Bremsweg beträgt 300 m > 280 m. Aus $30t - 0{,}75t^2 = 280$ folgt $t = 20 - \sqrt{400 - \frac{1120}{3}} \approx 14{,}84$ s, dort ist $v \approx 7{,}7$ m/s ≈ 28 km/h.
d) Haltezeit $t_h = \frac{30}{b}$, Weg $= 30t_h - \frac{b}{2}t_h^2 = \frac{450}{b} = 250 \Rightarrow b = 1{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: Weil die Steiggeschwindigkeit fällt, liefern Rechtecke mit dem rechten Randwert eine Untersumme und Rechtecke mit dem linken Randwert eine Obersumme. Das exakte Integral des Modells muss zwischen beiden Schätzungen liegen; die Abweichungen zeigen die Güte der Näherung.

a) Die Funktion fällt, die Untersumme nimmt jeweils den rechten Randwert: $327 + 268 + 220 + 180 = 995$ m.
b) Obersumme (linke Randwerte): $400 + 327 + 268 + 220 = 1215$ m.
c) $\left[-2000\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right]_0^4 = 2000(1 - \mathrm{e}^{-0{,}8}) \approx 1101{,}3$ m.
d) Da h' streng monoton fällt, gilt $995 \le 1101{,}3 \le 1215$. Mit feinerer Unterteilung nähern sich beide Summen dem Integral.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: Jede Aussage wird mit den Eigenschaften des Integrals geprüft. Ein Integral kann negativ sein, ist aber kein Flächeninhalt; Flächen entstehen erst durch Beträge. Falsche Aussagen werden mit einem Gegenbeispiel widerlegt.

a) Falsch. Gegenbeispiel: $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$, obwohl die Fläche nicht null ist; Flächen unterhalb der Achse zählen negativ.
b) Wahr. Mit F sind auch $F + C$ für jedes $C \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen, weil Konstanten beim Ableiten verschwinden.
c) Falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = x$ auf $[-1;1]$: $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$, aber $f \neq 0$.
d) Falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = 1$, $F(x) = x$: $F^2 = x^2$ hat die Ableitung $2x \neq 1 = f^2$.

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Die Nullstellen hängen von k ab und sind die Integrationsgrenzen. Die Fläche liegt unter der x-Achse, also nimmt man den Betrag des Integrals. Eine vorgegebene Fläche führt auf eine Gleichung für k.

a) $x(x - k) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = k$.
b) Der Graph liegt zwischen 0 und k unterhalb der Achse: $A(k) = -\int_0^k (x^2 - kx)\,dx = -\left(\frac{k^3}{3} - \frac{k^3}{2}\right) = \frac{k^3}{6}$.
c) $\frac{k^3}{6} = 36 \Rightarrow k^3 = 216 \Rightarrow k = 6$.
d) $9 - \frac{9}{2}k = 0 \Rightarrow k = 2$. Für $k = 2$ liegt zwischen 0 und 2 eine negative Fläche, die zwischen 2 und 3 von der positiven Fläche genau ausgeglichen wird.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Das Integral zwischen den Nullstellen ist negativ, weil die Fläche unter der x-Achse liegt. Der Flächeninhalt ist sein Betrag. Über größere Intervalle muss an den Nullstellen zerlegt werden.

a) $\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$. Negativ, weil der Graph unterhalb der Achse liegt; die Fläche hat den Inhalt $\frac{4}{3}$.

b) $\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^3 = 9 - 9 = 0$. Nein, die positive Teilfläche gleicht die negative aus.

c) .

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: Die Zahl der Besucher ist das Integral der Besucherrate. Der stärkste Andrang liegt beim Maximum der Rate. Für den Zeitpunkt, zu dem eine bestimmte Zahl erreicht ist, wird die Bestandsfunktion gleich dem Zielwert gesetzt.

a) $\int_0^{12}(-t^2 + 12t)\,dt = \left[-\frac{t^3}{3} + 6t^2\right]_0^{12} = -576 + 864 = 288$ Besucher.

b) $r'(t) = -2t + 12 = 0 \Rightarrow t = 6$; $r(6) = -36 + 72 = 36$ Besucher pro Minute.

c) $\int_0^6 = -72 + 216 = 144$; Anteil $\frac{144}{288} = \frac{1}{2}$. Wegen der Symmetrie der Parabel zu $t = 6$ kommt in jeder Hälfte gleich viel.

d) Die Rate ändert sich ständig. „Rate mal Zeit“ gilt nur bei konstanter Rate; sonst muss man die Rate über die Zeit aufsummieren, also integrieren.

Lösung zu Aufgabe 21

Lösungsweg: Der Inhalt des Hochbehälters ist Anfangsbestand plus Integral aus Zulauf minus Entnahme. Höchster und niedrigster Stand liegen bei Vorzeichenwechseln der Differenz. Die Integrale über den Tag zeigen, ob der Behälter ausreicht.

a) Zulauf: $\int_0^{24} z\,dt = 120 \cdot 24 = 2\,880\,\mathrm{m}^3$, der Sinusanteil mittelt sich über die volle Periode weg. Entnahme: $150 \cdot 24 = 3\,600\,\mathrm{m}^3$. Es fehlen $720\,\mathrm{m}^3$, der Bestand sinkt.

b) $B'(t) = 80\sin\left(\frac{\pi}{12}(t-6)\right) - 30 = 0 \Rightarrow \sin(\ldots) = \frac{3}{8}$. Mit $\arcsin\frac{3}{8} \approx 0{,}384$ folgt $\frac{\pi}{12}(t-6) = 0{,}384$ oder $\pi - 0{,}384$, also $t \approx 7{,}47$ und $t \approx 16{,}53$.

c) $B(t) = 900 + \int_0^t (z(s) - 150)\,ds = 900 - 30t - \frac{960}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{12}(t-6)\right)$; denn die Stammfunktion des Sinusterms ist $-\frac{960}{\pi}\cos(\ldots)$ und $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$.

d) $B(12) = 900 - 360 - \frac{960}{\pi}\cos\frac{\pi}{2} = 540\,\mathrm{m}^3$; $B(24) = 900 - 720 - \frac{960}{\pi}\cos\frac{3\pi}{2} = 180\,\mathrm{m}^3$. Das Minimum liegt bei $t \approx 7{,}47$ mit $B \approx 393\,\mathrm{m}^3$, das Maximum des Tages ist der Anfangswert $900\,\mathrm{m}^3$. Der Behälter läuft nicht über und wird nicht leer.