Lösungen zur Klassenarbeit - Skalarprodukt, Abstände und Winkel

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Zuerst werden die beiden Seitenvektoren vom Punkt A aus gebildet. Der Kosinus des Innenwinkels ist das Skalarprodukt geteilt durch das Produkt der Beträge (drei BE). Der Flächeninhalt des Dreiecks ist der halbe Betrag des Kreuzprodukts der beiden Seitenvektoren (zwei BE). Kontrolle: Der Winkel ist spitz, weil das Skalarprodukt 4 positiv ist; die Fläche $\frac{\sqrt{88}}{2} \approx 4{,}69$ ist kleiner als $\frac{\sqrt{8}\sqrt{13}}{2} \approx 5{,}10$.

a) , ; $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{8}\sqrt{13}} \Rightarrow \alpha \approx 66{,}91°$. (3 BE)

b) ; $A = \frac{1}{2}\sqrt{88} \approx 4{,}69$ FE. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 2 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Für den Abstand wird der Punkt in die Hessesche Normalenform eingesetzt und der Betrag genommen (zwei BE). Für den Lotfußpunkt stellt man die Lotgerade mit dem Normalenvektor als Richtung auf, schneidet sie mit der Ebene und setzt den Parameter wieder ein (drei BE). Der Abstand lässt sich damit kontrollieren.

a) $d = \frac{|2+2-6-4|}{3} = 2$. (2 BE)

b) Lotgerade $(1|2|3)^T + r(2|1|-2)^T$: $-2 + 9r = 4 \Rightarrow r = \frac{2}{3}$; . (3 BE)

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die drei Kantenvektoren gehen von derselben Ecke aus. Das Spatprodukt ist das Skalarprodukt des Kreuzprodukts zweier Kanten mit der dritten (zwei BE). Die dreiseitige Pyramide hat ein Sechstel des Spatvolumens; der Betrag sorgt für ein positives Ergebnis (zwei BE). Kontrolle: Die drei Kanten stehen senkrecht aufeinander, also gilt auch $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3\right) \cdot 4 = 4$ VE.

a) ; $(0|0|6) \circ (0|0|4) = 24$. (2 BE)

b) $V = \frac{24}{6} = 4$ VE. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Orthogonalität bedeutet, dass das Skalarprodukt null

ist; die entstehende lineare Gleichung liefert t (zwei BE). Einen Vektor, der auf beiden Vektoren senkrecht steht, erhält man mit dem Kreuzprodukt; eine Probe mit dem Skalarprodukt bestätigt das Ergebnis (zwei BE). Kontrolle:
$(9|3|-6) \circ (1|1|2) = 9+3-12 = 0$ und $(9|3|-6) \circ (2|-4|1) = 18-12-6 = 0$.
Häufiger Fehler: die Komponenten des Kreuzprodukts zu vertauschen.

a) $2t - 4 + 2 = 0 \Rightarrow t = 1$. (2 BE)

b) . (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 5 (2 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Der Ausdruck auf der linken Seite der Koordinatenform ist die Projektion eines Verbindungsvektors auf $\vec{n}$, multipliziert mit dessen Länge. Teilt man durch $|\vec{n}|$, erhält man die echte Länge des Lotes, unabhängig vom gewählten Vielfachen des Normalenvektors. Für Erklärung und Begründung gibt es je eine Bewertungseinheit.

$\vec{n} \circ \vec{p} - d$ ist die Projektion von auf $\vec{n}$, multipliziert mit $|\vec{n}|$. Erst durch Teilen durch $|\vec{n}|$ (Normieren) erhält man die Länge des Lotes, unabhängig davon, welches Vielfache von $\vec{n}$ man wählt. (2 BE)