Lernzettel - Skalarprodukt, Abstände und Winkel

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Einstieg: Die Drohne an der Hochspannungsleitung

Ein Energieversorger in Niedersachsen lässt seine Hochspannungsleitungen mit Drohnen kontrollieren. Die Drohne soll nahe genug heranfliegen, um Schäden an den Isolatoren zu fotografieren, darf aber wegen der elektrischen Felder einen Sicherheitsabstand zum Leiterseil nicht unterschreiten. Die Pilotin kennt die Koordinaten der Masten und die GPS-Position der Drohne. Wie weit ist die Drohne tatsächlich vom Seil entfernt?

Abstände und Winkel im Raum lassen sich nicht einfach ablesen. Das wichtigste Werkzeug ist das Skalarprodukt: Es erkennt rechte Winkel, liefert Winkelgrößen und führt zu Formeln für Abstände von Punkten zu Ebenen und Geraden. Zusammen mit dem Kreuzprodukt berechnet man außerdem Flächen und Volumina von Körpern.

Das Skalarprodukt

Definition: Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist die Zahl $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Geometrisch gilt $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi$, wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren ist.

Daraus folgt $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$. Besonders wichtig: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ genau dann, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **orthogonal** sind (für $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$). Beispiel: $\vec{a} = (1|2|2)^T$, $\vec{b} = (2|-1|2)^T$:

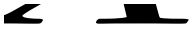
$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 - 2 + 4 = 4$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$, also $\cos\varphi = \frac{4}{9} \Rightarrow \varphi \approx 63{,}6°$.

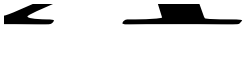
Satz: Skalarprodukt und Winkel

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi$, also $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$. Insbesondere ist

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

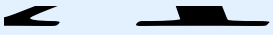
Orthogonalität und rechte Winkel

Ein Dreieck ABC hat bei A einen rechten Winkel, wenn  . Mit $A(1|0|0)$,

$B(3|1|2)$, $C(2|0|-1)$ ist  und , das Skalarprodukt $2+0-2=0$: rechter Winkel bei A. Sucht man k mit $(k|2|-1)^T \perp (3|1|4)^T$, löst man $3k+2-4=0$ und erhält $k=\frac{2}{3}$.

Das Kreuzprodukt

Definition: Kreuzprodukt

Das **Kreuzprodukt**  ist ein Vektor, der auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht. Sein Betrag $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Für ein Dreieck ABC gilt . Das **Spatprodukt** $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}$ liefert das Volumen des Spats (Parallelepipeds) $V=|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$. Eine dreiseitige Pyramide hat $V=\frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$.

Abstand Punkt–Ebene

Definition: Hessesche Normalenform

Für $E:\ n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=d$ und den Punkt P gilt $d(P,E)=\frac{|n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3-d|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}$.
Dies ist die **Hessesche Normalenform**: Teilt man die Gleichung durch $|\vec{n}|$, erhält man einen Normaleneinheitsvektor, und das Einsetzen von P liefert den vorzeichenbehafteten Abstand. Beispiel: $E:\ x_1+2x_2+2x_3=6$, $P(3|3|3)$: $|3+6+6-6|=9$, $|\vec{n}|=3$, also $d=3$. Der **Lotfußpunkt** ergibt sich, indem man die Lotgerade $\vec{x}=\vec{p}+r\vec{n}$ mit E schneidet: $15+9r=6\Rightarrow r=-1$, $F(2|1|1)$.

Satz: Abstand Punkt-Ebene

Für E: $\vec{n}\cdot\vec{x}=d$ und einen Punkt P gilt $d(P;E)=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}-d|}{|\vec{n}|}$.

Abstand Punkt–Gerade

Für $g:\ \vec{x}=\vec{a}+r\vec{u}$ und P: Stellen Sie die Hilfsebene H durch P mit Normalenvektor $\vec{u}$ auf, bestimmen Sie den Schnittpunkt F von g und H (Lotfußpunkt) und berechnen Sie .

Alternativ: . Beispiel: $g:\ \vec{x} = (1|0|0)^T + r(1|1|0)^T$, $P(2|2|3)$. Hilfsebene $x_1 + x_2 = 4$; Einsetzen $(1+r) + r = 4 \Rightarrow r = 1{,}5$; $F(2{,}5|1{,}5|0)$; ,

.

Weitere Abstände

Definition: Parallele Ebenen

Parallele Ebenen: Man wählt einen Punkt der einen Ebene und berechnet seinen Abstand zur anderen; bei gleichem Normalenvektor ist $d = \frac{|d_2 - d_1|}{|\vec{n}|}$. **Windschiefe Geraden:** Mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ ist . **Spiegelung** eines Punktes P an einer Ebene: Lotfußpunkt F bestimmen, dann $\vec{p}\,' = 2\vec{f} - \vec{p}$.

Anwendung: Körper und Höhen

In Abituraufgaben zu Pyramiden, Quadern und Prismen kommen alle Werkzeuge gemeinsam vor. Typische Teilaufgaben lauten: „Berechnen Sie den Winkel zwischen zwei Kanten“ (Skalarprodukt), „Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Grundfläche“ (Kreuzprodukt), „Berechnen Sie die Höhe der Pyramide“ (Abstand der Spitze von der Grundflächenebene) und „Bestimmen Sie das Volumen“ (Spatprodukt oder $V = \frac{1}{3} G\,h$). Die Höhe h ist der Abstand der Spitze von der Ebene der Grundfläche; mit der Koordinatenform der Grundflächenebene rechnen Sie ihn über die Hessesche Normalenform. Als Kontrolle berechnen Sie das Volumen auf zwei Wegen, zum Beispiel einmal mit dem Spatprodukt und einmal mit Grundfläche mal Höhe durch drei.

Rechenablauf für Winkel

So gehst du vor

1. Vektoren aufstellen (immer vom Scheitel des Winkels aus: und für den Winkel bei A).
2. Skalarprodukt und beide Längen berechnen.
3. $\cos\varphi$ bilden und mit dem Taschenrechner im Gradmaß $\cos^{-1}$ anwenden.
4. Ergebnis runden und auf Plausibilität prüfen: Ein positives Skalarprodukt bedeutet einen spitzen, ein negatives einen stumpfen Winkel, null einen rechten Winkel.

Weitere Beispiele

Beispiel 1: Winkel

Berechnen Sie den Winkel zwischen und .

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$. $\cos\varphi = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, also $\varphi \approx 70{,}5°$.

Beispiel 2: Orthogonalität

Für welches t sind | und | orthogonal?

$2t - 4 + 2 = 0 \Rightarrow t = 1$.

Beispiel 3: Abstand Punkt-Ebene

Bestimmen Sie den Abstand von $P(1|2|3)$ zu $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$.

$|\vec{n}| = 3$; $|2 - 4 + 3 - 1| = 0$. Der Abstand ist 0: P liegt in E.

Lotfußpunkt und Spiegelpunkt an einer Ebene

Statt mit der Abstandsformel kann man den Abstand eines Punktes P von einer Ebene auch geometrisch bestimmen. Man stellt die Lotgerade $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{n}$ auf, die senkrecht auf der Ebene steht, und schneidet sie mit E. Der Schnittpunkt ist der Lotfußpunkt F, der Abstand ist $|\overline{PF}|$. Setzt man den doppelten Parameter ein, erhält man den Spiegelpunkt P' von P an E. Dieses Verfahren liefert also drei Ergebnisse auf einmal.

Beispiel 4: Lotfußpunkt und Spiegelpunkt

Gegeben sind $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10$ und $P(4|5|7)$. Bestimmen Sie Lotfußpunkt, Abstand und Spiegelpunkt.

Lotgerade $\vec{x} = (4|5|7)^T + r(1|2|2)^T$. Einsetzen:
$(4 + r) + 2(5 + 2r) + 2(7 + 2r) = 10 \Rightarrow 28 + 9r = 10 \Rightarrow r = -2$. Lotfußpunkt $F(2|1|3)$, Abstand $|-2| \cdot |\vec{n}| = 2 \cdot 3 = 6$. Spiegelpunkt mit $r = -4$: $P'(0|-3|-1)$. Kontrolle mit der Hesseschen Normalenform: $\frac{|4+10+14-10|}{3} = 6$ ✓.

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Der kürzeste Weg von P zu einer Geraden g steht senkrecht auf g. Für den Lotfußpunkt

$F = \vec{a} + r\vec{u}$ muss deshalb der Verbindungsvektor orthogonal zum Richtungsvektor sein: $(\vec{a} + r\vec{u} - \vec{p}) \circ \vec{u} = 0$. Diese Gleichung ist linear in r. Alternativ kann man mit dem Kreuzprodukt rechnen: Das von und $\vec{u}$ aufgespannte Parallelogramm hat die Fläche ; teilt man durch die Grundseite $|\vec{u}|$, bleibt die Höhe, also der Abstand.

Beispiel 5: Die Drohne und das Leiterseil

Das Seil verläuft von $M_1(0|0|30)$ nach $M_2(200|150|30)$, die Drohne ist in $D(100|100|25)$ (in m). Wie weit ist sie vom Seil entfernt?

$g:\ \vec{x} = (0|0|30)^T + r(4|3|0)^T$. Bedingung: $(4r - 100|3r - 100|5) \circ (4|3|0) = 25r - 700 = 0 \Rightarrow r = 28$. Lotfußpunkt $F(112|84|30)$, , Abstand $\sqrt{144 + 256 + 25} = \sqrt{425} \approx 20{,}6$ m.

Flächen und Volumina mit Vektoren

Das Kreuzprodukt verbindet Algebra und Geometrie: Seine Länge ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, seine Richtung die Normale. Nimmt man das Skalarprodukt mit einem dritten Kantenvektor, erhält man das Volumen des Spats; Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche haben ein Sechstel davon. So lassen sich Volumina auch dann berechnen, wenn keine Kante senkrecht auf der Grundfläche steht.

Beispiel 6: Volumen eines Zeltes

Ein Zelt hat die dreieckige Grundfläche $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(2|3|0)$ und die Spitze $S(2|1|4)$ (in m). Berechnen Sie das Volumen.

, $(0|0|12) \circ (2|1|4) = 48$, $V = \frac{48}{6} = 8\,\mathrm{m}^3$. Kontrolle: Grundfläche $\frac{1}{2} \cdot 12 = 6\,\mathrm{m}^2$, Höhe 4 m, $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 4 = 8\,\mathrm{m}^3$ ✓.

Abstände paralleler Objekte

Sind zwei Ebenen parallel, haben alle Punkte der einen Ebene denselben Abstand zur anderen. Man wählt daher einen bequemen Punkt, etwa einen Spurpunkt, und setzt ihn in die Hessesche Normalenform der anderen Ebene ein. Genauso geht man bei einer Geraden vor, die parallel zu einer Ebene verläuft: Der Abstand des Stützpunkts ist der Abstand der ganzen Geraden. Bei parallelen Geraden berechnet man den Abstand eines Punktes der einen Geraden zur anderen Geraden. Prüfen Sie vorher immer, ob die Objekte wirklich parallel sind; schneiden sie sich, ist der Abstand null.

Wusstest du? Otto Hesse

Die Abstandsformel mit dem normierten Normalenvektor heißt nach dem Mathematiker Ludwig Otto Hesse (1811–1874), der in Königsberg, Heidelberg und München lehrte. Er schrieb Ebenengleichungen so, dass die linke Seite direkt den Abstand eines Punktes angibt. Heute nutzen Computerspiele und CAD-Programme genau diese Darstellung, um in Sekundenbruchteilen zu prüfen, ob ein Objekt eine Wand berührt.

Das Skalarprodukt anschaulich: Projektion

Das Skalarprodukt hat eine anschauliche Bedeutung. Projiziert man den Vektor $\vec{a}$ senkrecht auf die Richtung von $\vec{b}$, so entsteht ein Schatten der Länge $|\vec{a}|\cos\varphi$. Das Skalarprodukt ist dieser Schatten multipliziert mit der Länge von $\vec{b}$. Ist der Winkel spitz, zeigt der Schatten in Richtung von $\vec{b}$, und das Skalarprodukt ist positiv. Ist der Winkel stumpf, zeigt der Schatten in die Gegenrichtung, und das Skalarprodukt wird negativ. Bei einem rechten Winkel schrumpft der Schatten auf einen Punkt, das Skalarprodukt ist null.

Genau diese Projektion steckt in der Hesseschen Normalenform. Der Abstand eines Punktes von einer Ebene ist die Länge der Projektion eines Verbindungsvektors auf die Normalenrichtung. Auch in der Physik begegnet man der Projektion: Die Arbeit, die eine Kraft an einem Wagen verrichtet, ist das Skalarprodukt aus Kraft und Weg. Zieht man einen Bollerwagen schräg an der Deichsel, trägt nur der Anteil der Kraft in Fahrtrichtung zur Bewegung bei. Wer diese Vorstellung verinnerlicht, versteht auch, warum die Abstandsformel nicht vom gewählten Ebenenpunkt abhängt: Alle Verbindungsvektoren haben dieselbe Projektion auf die Normale. Diese geometrische Sicht hilft auch dabei, Rechenergebnisse schnell auf Plausibilität zu prüfen, bevor man sie in eine Abiturlösung übernimmt.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Skalarprodukt $\vec{a}\circ\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$; $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\circ\vec{b}=0$; $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\circ\vec{a}}$.
- Winkel zwischen Vektoren: $\cos\varphi=\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$ mit $0^\circ\le\varphi\le180^\circ$; bei Geraden nimmt man den Betrag und erhält höchstens 90°.
- Kreuzprodukt: $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ist der Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms, die Hälfte davon der des Dreiecks.
- Spatprodukt: $V_{\text{Spat}}=|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$; dreiseitige Pyramide: $V=\frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$.
- Abstand Punkt–Ebene (Hessesche Normalenform): $d(P,E)=\frac{|n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3-d|}{|\vec{n}|}$; alternativ Lotgerade $\vec{x}=\vec{p}+r\vec{n}$ mit E schneiden.
- Lotfußpunkt F und Spiegelpunkt P': $F=P+r_0\vec{n}$, $P'=P+2r_0\vec{n}$.
- Abstand Punkt–Gerade: Lotfußpunkt F aus $(\vec{a}+r\vec{u}-\vec{p})\circ\vec{u}=0$, dann ;


oder  .

- Abstand windschiefer Geraden: mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$; parallele Objekte (Ebenen, Gerade und Ebene): Abstand eines beliebigen Punktes.

Achtung: Typische Fehler

- Beim Winkel den Betrag der Vektoren vergessen oder den Taschenrechner im Bogenmaß benutzen.
- Beim Abstand die Betragsstriche weglassen und einen negativen Abstand angeben.
- Den Normalenvektor nicht normieren (Division durch $|\vec{n}|$ vergessen).
- Kreuzprodukt mit dem Skalarprodukt verwechseln: Das Skalarprodukt ist eine Zahl, das Kreuzprodukt ein Vektor.
- Beim Volumen den Faktor $\frac{1}{6}$ bei der Pyramide vergessen.

Ottos Tipp: Frage dich bei jeder Aufgabe: „Brauche ich einen Winkel (Skalarprodukt), eine Fläche (Kreuzprodukt) oder einen Abstand (Hesse oder Lotfußpunkt)?“ Dann findest du den Rechenweg sofort!

Ottos Tipp

Schreiben Sie bei Winkelaufgaben immer zuerst die Formel mit eingesetzten Zahlen hin und stellen Sie den Taschenrechner auf Gradmaß. Bei Schnittwinkeln mit Ebenen den Betrag im Zähler nicht vergessen.