Arbeitsblatt - Skalarprodukt, Abstände und Winkel

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Skalarprodukt und Orthogonalität

Berechnen Sie jeweils $\vec{a} \circ \vec{b}$ und entscheiden Sie, ob die Vektoren orthogonal sind.

a) ,

b) ,

c) ,

d) ,

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Winkel zwischen Vektoren

Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren.

a) und

b) und

c) und

d) und

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Orthogonale Vektoren finden

Bearbeiten Sie die Aufgaben mit dem Skalarprodukt bzw. Kreuzprodukt.

a) Bestimmen Sie t so, dass $(t|2|-1)^T$ und $(3|t|4)^T$ orthogonal sind.
b) Geben Sie zwei verschiedene, nicht parallele Vektoren an, die zu $(2|1|2)^T$ orthogonal sind.
c) Bestimmen Sie einen Vektor, der zu $(1|0|2)^T$ und $(0|1|-1)^T$ orthogonal ist.
d) Normieren Sie den Vektor aus c) auf die Länge 1.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Ein rechtwinkliges Dreieck?

Gegeben ist das Dreieck mit $A(1|1|1)$, $B(3|2|3)$, $C(2|-1|1)$.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen.
b) Zeigen Sie, dass das Dreieck rechtwinklig ist. Wo liegt der rechte Winkel?
c) Berechnen Sie die beiden anderen Innenwinkel.
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt.

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Flächen mit dem Kreuzprodukt

Ein Parallelogramm $ABCD$ hat die Ecke $A(1|0|0)$ und wird von [redacted] und [redacted] aufgespannt.

a) Bestimmen Sie die Ecken B, C, D.
b) Berechnen Sie $\vec{u} \times \vec{v}$ und den Flächeninhalt des Parallelogramms.
c) Wie groß ist das Dreieck ABD?
d) Bestätigen Sie den Flächeninhalt mit $A = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\sin\varphi$.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Abstand Punkt-Ebene

Gegeben ist $E:\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$.

a) Geben Sie die Hessesche Normalenform von E an.
b) Berechnen Sie die Abstände der Punkte $P(1|1|1)$, $Q(4|0|3)$, $R(3|1|1)$ von E.
c) Liegen P und Q auf derselben Seite von E?
d) Geben Sie die beiden Ebenen an, die zu E parallel sind und von E den Abstand 2 haben.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Lotfußpunkt und Spiegelpunkt

Gegeben sind $E:\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10$ und $P(4|5|7)$.

a) Stellen Sie die Lotgerade durch P auf.
b) Bestimmen Sie den Lotfußpunkt F und den Abstand $d(P, E)$.
c) Bestimmen Sie den Spiegelpunkt P' von P an E.
d) Kontrollieren Sie, dass F der Mittelpunkt von P und dem Spiegelpunkt ist.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Abstand Punkt-Gerade

Gegeben sind und $P(8|2|1)$.

a) Stellen Sie die Bedingung für den Lotfußpunkt F auf.
b) Bestimmen Sie F und den Abstand $d(P, g)$.
c) Bestätigen Sie den Abstand mit der Formel .

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Abstand windschiefer Geraden

Gegeben sind $g:\ \vec{x} = r \cdot (1|0|0)^T$ und $h:\ \vec{x} = (0|1|3)^T + s \cdot (0|1|1)^T$.

a) Zeigen Sie, dass g und h windschief sind.
b) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{n}$, der zu beiden Richtungsvektoren orthogonal ist.
c) Berechnen Sie den Abstand der Geraden.

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Parallele Ebenen und Geraden

Gegeben sind $E_1:\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$, $E_2:\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 12$ und $g:\ \vec{x} = (1|1|4)^T + r \cdot (2|-1|0)^T$.

a) Zeigen Sie, dass E_1 und E_2 parallel sind, und berechnen Sie ihren Abstand.
b) Zeigen Sie, dass g parallel zu E_1 ist.
c) Berechnen Sie den Abstand von g zu E_1 und zu E_2.
d) Liegt g zwischen den beiden Ebenen?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Die Drohne am Leiterseil

Ein Leiterseil einer Hochspannungsleitung wird zwischen zwei Masten als gerade

Strecke von $M_1(0|0|30)$ nach $M_2(200|150|30)$ modelliert (in m). Eine Inspektionsdrohne befindet sich in $D(100|100|25)$. Der Netzbetreiber verlangt einen Sicherheitsabstand von mindestens 15 m zum Seil.

a) Stellen Sie eine Gleichung der Seilgeraden auf.
b) Bestimmen Sie den Lotfußpunkt von D auf der Seilgeraden. Liegt er zwischen den Masten?
c) Berechnen Sie den Abstand der Drohne vom Seil. Ist der Sicherheitsabstand eingehalten?
d) Die Drohne steigt senkrecht auf. In welcher Höhe unterschreitet sie den Sicherheitsabstand? (Hinweis: Der Lotfußpunkt bleibt gleich, weil das Seil waagerecht ist.)

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Die Glaspyramide

Eine Glaspyramide hat die quadratische Grundfläche $A(-5|-5|0)$, $B(5|-5|0)$, $C(5|5|0)$, $D(-5|5|0)$ und die Spitze $S(0|0|8)$ (in m). Die Seitenfläche ABS liegt in $-8x_2 + 5x_3 = 40$.

a) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.
b) Berechnen Sie den Abstand des Mittelpunkts $M(0|0|0)$ der Grundfläche von der Seitenfläche ABS.
c) Berechnen Sie den Neigungswinkel der Seitenflächen gegenüber dem Boden.
d) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Kante AS und dem Boden.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Der Schornstein und das Dach

Eine Dachfläche liegt in $E: \; -x_2 + 2x_3 = 12$ (in m). Die Oberkante eines Schornsteins ist der Punkt $K(3|2|10)$. Nach der Feuerungsverordnung muss die Schornsteinmündung bei diesem Dach mindestens 40 cm über der Dachfläche liegen, gemessen senkrecht zum Dach.

a) Berechnen Sie den Abstand von K zur Dachebene.
b) Bestimmen Sie den Lotfußpunkt.
c) Wie hoch ragt der Schornstein senkrecht (in x_3-Richtung) über das Dach?
d) Ist die Vorschrift erfüllt? Erklären Sie, warum der senkrechte Abstand zum Dach kleiner ist als der lotrechte Überstand.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Flugbahnen in verschiedenen Höhen

Zwei Flugzeuge fliegen auf den Bahnen $g: \; \vec{x} = (0|0|8)^T + r \cdot (8|6|0)^T$ und $h: \; \vec{x} = (40|-30|10)^T + s \cdot (0|10|0)^T$ (in km).

a) Zeigen Sie, dass die Bahnen windschief sind.
b) Berechnen Sie den Abstand der Bahnen mit der Formel für windschiefe Geraden.

c) Erklären Sie das Ergebnis anschaulich.
d) Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich die Bahnen (von oben gesehen) kreuzen.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Diagonalen im Würfel

Ein Würfel hat die Kantenlänge 6 und die Ecken $A(0|0|0)$, $B(6|0|0)$, $C(6|6|0)$, $D(0|6|0)$, $E(0|0|6)$, $F(6|0|6)$, $G(6|6|6)$, $H(0|6|6)$.

a) Berechnen Sie die Länge der Raumdiagonalen AG.
b) Berechnen Sie den Winkel zwischen AG und der Kante AB.
c) Berechnen Sie den Winkel zwischen AG und der Bodenfläche $ABCD$.
d) Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich die Raumdiagonalen AG und BH schneiden.
e) Berechnen Sie den Abstand der Ecke B von der Raumdiagonalen AG.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Das Zelt aus der Werbung

Ein Campingzelt hat die Form einer dreiseitigen Pyramide mit den Bodenecken $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(2|3|0)$ und der Spitze $S(2|1|4)$ (in m).

a) Berechnen Sie den Inhalt der Bodenfläche.
b) Berechnen Sie das Volumen mit dem Spatprodukt und kontrollieren Sie mit $V = \frac{1}{3}Gh$.
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Seitenwand ABS.
d) Der Hersteller wirbt mit „über 8 Kubikmeter Platz“. Nehmen Sie Stellung.
e) Welchen Winkel schließt die Wand ABS mit dem Boden ein?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Der kürzeste Lichtweg

Ein Lichtstrahl soll vom Punkt $A(1|2|3)$ über einen Spiegel auf dem Fußboden ($x_3 = 0$) zum Punkt $B(5|6|1)$ gelangen. Nach dem Reflexionsgesetz nimmt das Licht den kürzesten Weg.

a) Bestimmen Sie den Spiegelpunkt A' von A an der Fußbodenebene.
b) Begründen Sie: Der kürzeste Weg $A \to R \to B$ über einen Bodenpunkt R ist so lang wie die Strecke .
c) Bestimmen Sie den Reflexionspunkt R als Schnittpunkt von $A'B$ mit dem Boden.
d) Berechnen Sie die Länge des Lichtwegs.
e) Zeigen Sie, dass Einfalls- und Ausfallswinkel (gegen den Boden) gleich sind.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Die schiefe Transportkiste

In einer Fabrik wird eine Transportkiste in Form eines Spats gefertigt, der von den Kantenvektoren $\vec{a} = (4|0|0)^T$, $\vec{b} = (1|3|0)^T$ und $\vec{c} = (1|1|2)^T$ aufgespannt wird (in dm).

a) Berechnen Sie das Volumen der Kiste in Litern.
b) Berechnen Sie den Inhalt der Grundfläche und die Höhe der Kiste.
c) Wie groß ist der Winkel zwischen der Kante $\vec{c}$ und der Grundfläche?
d) Eine zweite Kiste hat dieselben Kanten $\vec{a}$ und $\vec{b}$, aber $\vec{c}^{\,*} = (0|0|2)^T$. Vergleichen Sie die Volumina und erklären Sie.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Punkte mit vorgegebenem Abstand

Gegeben sind $E:\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ und $g:\ \vec{x} = (1|0|0)^T + r \cdot (1|1|1)^T$.

a) Zeigen Sie, dass g die Ebene E schneidet, und bestimmen Sie den Schnittpunkt.
b) Bestimmen Sie die Punkte von g, die von E den Abstand 3 haben.
c) Geben Sie die beiden zu E parallelen Ebenen im Abstand 3 an und bestätigen Sie b).
d) Unter welchem Winkel schneidet g die Ebene?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Das gemeinsame Lot (Knobelaufgabe)

Gegeben sind die windschiefen Geraden $g:\ \vec{x} = (1|0|0)^T + r \cdot (1|1|0)^T$ und $h:\ \vec{x} = (0|1|3)^T + s \cdot (0|1|1)^T$.

a) Berechnen Sie den Abstand mit der Formel .

b) Die kürzeste Verbindung steht auf beiden Geraden senkrecht. Stellen Sie mit $F_g = \vec{a} + r\vec{u}$, $F_h = \vec{b} + s\vec{v}$ die beiden Bedingungen auf.
c) Lösen Sie das System und bestimmen Sie F_g und F_h.
d) Bestätigen Sie den Abstand aus a) mit .