Lösungen - Skalarprodukt, Abstände und Winkel

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Das Skalarprodukt berechnet man, indem man die Komponenten paarweise multipliziert und die Produkte addiert. Ergibt sich null, stehen die Vektoren senkrecht aufeinander. Ein anderer Wert zeigt, dass kein rechter Winkel vorliegt.

a) $4 - 10 + 6 = 0$: orthogonal.
b) $6 - 6 + 4 = 4 \neq 0$: nicht orthogonal.
c) $1 - 2 + 1 = 0$: orthogonal.
d) $12 + 0 - 12 = 0$: orthogonal.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Für den Winkel braucht man das Skalarprodukt und die Beträge beider Vektoren. Der Quotient ist der Kosinus des Winkels. Ein Skalarprodukt von null bedeutet $90°$, ein negatives Ergebnis einen stumpfen Winkel; entgegengesetzte Vektoren bilden $180°$.

a) $\cos\varphi = \frac{1}{1\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45°$.
b) $2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow \varphi = 90°$.
c) $\cos\varphi = \frac{2+0+2}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi \approx 19{,}47°$.
d) $\vec{b} = -2\vec{a}$: entgegengesetzt, $\cos\varphi = \frac{-18}{3\cdot 6} = -1 \Rightarrow \varphi = 180°$.

Lösung zu Aufgabe 3

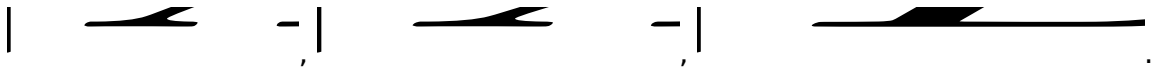
Lösungsweg: Orthogonalität wird als Gleichung „Skalarprodukt gleich null“ geschrieben und nach dem Parameter aufgelöst. Orthogonale Vektoren zu einem gegebenen Vektor findet man durch geschicktes Vertauschen und Vorzeichenwechsel, einen Vektor senkrecht zu zwei Vektoren mit dem Kreuzprodukt.

a) $3t + 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 0{,}8$.
b) Zum Beispiel $(1|-2|0)^T$ $(2 - 2 + 0 = 0)$ und $(0|2|-1)^T$ $(0 + 2 - 2 = 0)$.
c) ; Probe: $-2 + 0 + 2 = 0$, $0 + 1 - 1 = 0$ ✓.
d) Länge $\sqrt{6}$: $\frac{1}{\sqrt{6}}(-2|1|1)^T$.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Die Seitenlängen sind Beträge der Verbindungsvektoren. Ein rechter

Winkel liegt dort, wo das Skalarprodukt der beiden anliegenden Seitenvektoren null ist. Die übrigen Winkel folgen aus dem Kosinus, der Flächeninhalt aus den beiden Katheten.

a) .

b)  : rechter Winkel bei A. Kontrolle mit Pythagoras: $9 + 5 = 14$ ✓.

c) Bei B: $\cos\beta = \frac{(-2|-1|-2)\circ(-1|-3|-2)}{3\sqrt{14}} = \frac{9}{3\sqrt{14}} \Rightarrow \beta \approx 36{,}70°$; $\gamma = 90° - \beta \approx 53{,}30°$.

d) $A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \approx 3{,}35$ FE.

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Die Ecken des Parallelogramms entstehen durch Vektoraddition. Der Betrag des Kreuzprodukts der Spannvektoren ist der Flächeninhalt, das Dreieck hat die Hälfte. Zur Kontrolle wird die Formel mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels verwendet.

a) $B(3|1|0)$, $D(1|1|3)$, $C = B + \vec{v} = (3|2|3)$.

b) , $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7$ FE.

c) Die Hälfte: $3{,}5$ FE.

d) $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{10}}$, $\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{50}} = \frac{7}{\sqrt{50}}$; $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{7}{\sqrt{50}} = 7$ ✓.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Für die Hessesche Normalenform teilt man die Koordinatenform durch den Betrag des Normalenvektors. Setzt man einen Punkt ein, liefert der Betrag des Ergebnisses den Abstand, das Vorzeichen die Seite. Parallele Ebenen im gegebenen Abstand ändern nur die rechte Seite.

a) $|\vec{n}| = 3$: $\frac{2x_1 - 2x_2 + x_3 - 5}{3} = 0$.

b) $d(P) = \frac{|2-2+1-5|}{3} = \frac{4}{3}$; $d(Q) = \frac{|8+3-5|}{3} = 2$; $d(R) = \frac{|6-2+1-5|}{3} = 0$, $R \in E$.

c) Vor dem Betrag: P ergibt -4, Q ergibt $+6$. Verschiedene Vorzeichen: verschiedene Seiten.

d) $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \pm 6$: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 11$ und $2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: Die Lotgerade verläuft durch den Punkt in Richtung des Normalenvektors. Ihr Schnittpunkt mit der Ebene ist der Lotfußpunkt, die Länge des Lotes der Abstand. Mit dem doppelten Parameter erhält man den Spiegelpunkt; der Lotfußpunkt ist der Mittelpunkt.

a) $\vec{x} = (4|5|7)^T + r \cdot (1|2|2)^T$.

b) $28 + 9r = 10 \Rightarrow r = -2$: $F(2|1|3)$;

c) $r = -4$: $P'(0|-3|-1)$.
d) $\frac{1}{2}((4|5|7) + (0|-3|-1)) = (2|1|3) = F$ ✓.

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: Der Lotfußpunkt ist der Punkt der Geraden, dessen Verbindungsvektor zum gegebenen Punkt senkrecht auf dem Richtungsvektor steht. Das liefert eine lineare Gleichung für r. Der Abstand ist dann der Betrag dieses Verbindungsvektors; die Kreuzproduktformel bestätigt ihn.

a) muss orthogonal zu $\vec{u}$ sein:

$2(2r-7) + (r-2) - 2(1-2r) = 0$.

b) $9r - 18 = 0 \Rightarrow r = 2$; $F(5|2|-2)$; , $d = \sqrt{18} \approx 4{,}24$.

c) , , Betrag $9\sqrt{2}$; geteilt durch $|\vec{u}| = 3$: $3\sqrt{2}$ ✓.

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Windschiefe Geraden werden zuerst nachgewiesen. Ein Vektor senkrecht zu beiden Richtungen entsteht mit dem Kreuzprodukt. Projiziert man einen Verbindungsvektor zwischen den Stützpunkten auf diesen Normalenvektor, erhält man den kürzesten Abstand.

a) Keine Vielfachen. Gleichsetzen: $r = 0$, $0 = 1 + s \Rightarrow s = -1$, $0 = 3 + s = 2$: Widerspruch. Windschief.

b) .

c) $d = \frac{|(0|1|3) \circ (0|-1|1)|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Bei parallelen Objekten haben alle Punkte denselben Abstand. Man wählt deshalb einen bequemen Punkt und setzt ihn in die Hessesche Normalenform ein. Ob die Gerade zwischen den Ebenen liegt, zeigen die Werte der linken Seite.

a) Gleiche Normalenvektoren; Punkt $(3|0|0) \in E_1$: $d = \frac{|3-12|}{3} = 3$.
b) $(1|2|2) \circ (2|-1|0) = 0$.
c) Stützpunkt: $1 + 2 + 8 = 11$. $d(g, E_1) = \frac{|11-3|}{3} = \frac{8}{3}$, $d(g, E_2) = \frac{|11-12|}{3} = \frac{1}{3}$.

d) Ja: 3, und $\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=3$.

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: Das Seil wird als Gerade beschrieben. Der Lotfußpunkt der Drohne ergibt sich aus der Orthogonalitätsbedingung, der Abstand aus dem Betrag des Verbindungsvektors. Beim senkrechten Aufsteigen bleibt der horizontale Abstand unverändert und begrenzt den kleinsten möglichen Abstand.

a) $\vec{x}=(0|0|30)^T+r\cdot(4|3|0)^T$, $0\le r\le 50$.
b) $25r-700=0\Rightarrow r=28$: $F(112|84|30)$; $0\le 28\le 50$, also zwischen den Masten.
c) m >15 m: eingehalten.

d) Horizontaler Abstand $\sqrt{144+256}=20$ m >15 m. Der Abstand ist mindestens 20 m und wird nie kleiner als 15 m. Die Drohne unterschreitet den Sicherheitsabstand in keiner Höhe; am kleinsten (20 m) ist er in 30 m Höhe.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Das Volumen folgt aus der Pyramidenformel. Der Abstand des Grundflächenmittelpunkts zur Seitenfläche wird mit der Hesseschen Normalenform berechnet. Die Neigungswinkel ergeben sich aus Normalenvektoren bzw. aus dem Kantenvektor und dem Boden.

a) $V=\frac{1}{3}\cdot 100\cdot 8\approx 266{,}7\,\mathrm{m}^3$.
b) $d=\frac{|0-0-40|}{\sqrt{89}}=\frac{40}{\sqrt{89}}\approx 4{,}24$ m.
c) $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{89}}\Rightarrow\varphi\approx 57{,}99^\circ$.
d) ; $\sin\psi=\frac{8}{\sqrt{114}}\Rightarrow\psi\approx 48{,}53^\circ$.

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Der Abstand der Schornsteinmündung zur Dachebene wird mit der Hesseschen Normalenform bestimmt, der Lotfußpunkt mit der Lotgeraden. Der lotrechte Überstand ergibt sich aus der Dachhöhe an derselben Stelle. Beide Werte unterscheiden sich wegen der Dachneigung.

a) $d=\frac{|-2+20-12|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}\approx 2{,}68$ m.
b) Lotgerade $(3|2|10)^T+r(0|-1|2)^T$:
$-(2-r)+2(10+2r)=12\Rightarrow 18+5r=12\Rightarrow r=-1{,}2$; $F(3|3{,}2|7{,}6)$.
c) Über $(3|2)$ liegt das Dach bei $x_3=7$; Überstand 3 m.
d) Ja, $2{,}68$ m $>0{,}4$ m. Der lotrechte Weg zum Dach ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete der senkrechte Abstand ist: $2{,}68=3\cos(26{,}57^\circ)$.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Zuerst wird die windschiefe Lage nachgewiesen. Mit dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren und einem Verbindungsvektor folgt der Abstand der Bahnen. Der Kreuzungswinkel von oben gesehen ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren.

a) Keine Vielfachen; dritte Zeile $8 = 10$: kein Schnittpunkt.

b)  ; $d = \frac{|160|}{80} = 2$ km.

c) Beide Bahnen sind waagerecht, eine in 8 km, die andere in 10 km Höhe. Ihr kleinster Abstand ist der Höhenunterschied.

d) $\cos\varphi = \frac{|0+60+0|}{10 \cdot 10} = 0{,}6 \Rightarrow \varphi \approx 53{,}13°$.

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Die Raumdiagonale ist ein Vektor vom Ursprung zur gegenüberliegenden Ecke. Winkel zu Kanten werden mit dem Kosinus, Winkel zu Flächen mit dem Sinus und dem Normalenvektor berechnet. Den Abstand einer Ecke zur Diagonale liefert die Kreuzproduktformel.

a) $|(6|6|6)| = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39$.

b) $\cos\varphi = \frac{36}{6\sqrt{3} \cdot 6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi \approx 54{,}74°$.

c) Mit $\vec{n} = (0|0|1)^T$: $\sin\varphi = \frac{6}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi \approx 35{,}26°$.

d)  ; $\cos\varphi = \frac{|-36+36+36|}{108} = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi \approx 70{,}53°$.

e) .

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: Die Bodenfläche folgt aus dem halben Betrag des Kreuzprodukts, das Volumen aus dem Spatprodukt. Die Seitenwand ist ein Dreieck, dessen Fläche ebenfalls mit dem Kreuzprodukt berechnet wird. Der Winkel zum Boden ergibt sich aus den Normalenvektoren.

a)  ; $G = 6\,\text{m}^2$.

b) $V = \frac{1}{6}|(0|0|12) \circ (2|1|4)| = \frac{48}{6} = 8\,\text{m}^3$; $\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 4 = 8$ ✓.

c) , Fläche $\frac{1}{2}\sqrt{256+16} = \frac{1}{2}\sqrt{272} \approx 8{,}25\,\text{m}^2$.

d) Das Volumen ist genau $8\,\mathrm{m}^3$, nicht „über 8“. Nutzbar ist wegen der schrägen Wände sogar deutlich weniger. Die Werbung übertreibt.
e) $\vec{n} = (0|-16|4)^T$ bzw. $(0|-4|1)^T$; $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \varphi \approx 75{,}96°$.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: Spiegelt man den Startpunkt am Boden, wird jeder Weg über den Boden so lang wie der Weg vom Spiegelpunkt. Der kürzeste Weg ist daher eine Strecke; ihr Schnittpunkt mit dem Boden ist der Reflexionspunkt. Gleiche Winkel bestätigen das Reflexionsgesetz.

a) $A'(1|2|-3)$.
b) Für jeden Bodenpunkt R gilt $|AR| = |A'R|$. Der Weg $A' \to R \to B$ ist am kürzesten, wenn R auf der Strecke liegt.
c) $\vec{x} = (1|2|-3)^T + r(4|4|4)^T$; $-3 + 4r = 0 \Rightarrow r = 0{,}75$: $R(4|5|0)$.
d) .
e) , ; beide bilden mit dem Boden $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, also $\varphi \approx 35{,}26°$.

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Das Volumen des Spats ist der Betrag des Spatprodukts der drei Kantenvektoren. Die Grundfläche ist der Betrag des Kreuzprodukts, die Höhe der Quotient aus Volumen und Grundfläche. Der Vergleich zweier Kisten zeigt das Prinzip von Cavalieri.

a) $\vec{a} \times \vec{b} = (0|0|12)^T$; $V = |(0|0|12) \circ (1|1|2)| = 24\,\mathrm{dm}^3 = 24$ Liter.
b) $G = 12\,\mathrm{dm}^2$, $h = \frac{24}{12} = 2$ dm.
c) $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \varphi \approx 54{,}74°$.
d) Auch 24 Liter: Grundfläche und Höhe sind gleich (Prinzip von Cavalieri), die Schiefe ändert das Volumen nicht.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Der Schnittpunkt mit der Ebene ergibt sich durch Einsetzen der Geraden. Punkte mit gegebenem Abstand findet man, indem man einen allgemeinen Geradenpunkt in die Hessesche Normalenform einsetzt; der Betrag führt zu zwei Lösungen. Die parallelen Ebenen bestätigen das Ergebnis.

a) $2 + 5r = 4 \Rightarrow r = 0{,}4$: $S(1{,}4|0{,}4|0{,}4)$.
b) $\frac{|2+5r-4|}{3} = 3 \Rightarrow 5r - 2 = \pm 9 \Rightarrow r = 2{,}2$ oder $r = -1{,}4$: $(3{,}2|2{,}2|2{,}2)$ und $(-0{,}4|-1{,}4|-1{,}4)$.
c) $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \pm 9$: $= 13$ und $= -5$. Probe: $6{,}4 + 2{,}2 + 4{,}4 = 13$ ✓; $-0{,}8 - 1{,}4 - 2{,}8 = -5$ ✓.

d) $\sin\varphi = \frac{5}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi \approx 74{,}21°$.

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: Zuerst wird der Abstand mit der Formel für windschiefe Geraden berechnet. Dann sucht man die Fußpunkte der kürzesten Verbindung: Der Verbindungsvektor muss auf beiden Richtungsvektoren senkrecht stehen. Das ergibt zwei lineare Gleichungen für r und s.

a) ; ; $d = \frac{|-1-1+3|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$.

b) $\vec{w} = \vec{a} + r\vec{u} - \vec{b} - s\vec{v} = (1 + r| - 1 + r - s| - 3 - s)^T$; $\vec{w} \circ \vec{u} = 0$: $2r - s = 0$; $\vec{w} \circ \vec{v} = 0$: $r - 2s - 4 = 0$.

c) Aus $s = 2r$: $r - 4r = 4 \Rightarrow r = -\frac{4}{3}$, $s = -\frac{8}{3}$. , .

d) , Länge $\sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ✓.