Lösungen zur Klassenarbeit - Produktregel, Kettenregel und weitere Ableitungsregeln

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (6 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Bei a) wird die Produktregel mit der Kettenregel für e^{3x} kombiniert und ausgeklammert (zwei BE). Bei b) verwendet man die Quotientenregel und kürzt einen Faktor x (zwei BE). Bei c) wird die Wurzel als Potenz geschrieben und mit der Kettenregel abgeleitet; die innere Ableitung ist e^{x} (zwei BE).

a) $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{3x} + 3x^2\mathrm{e}^{3x} = x(3x+2)\mathrm{e}^{3x}$. (2 BE)

b) $g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$. (2 BE)

c) $h'(x) = \frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{x})^{-1/2}\cdot \mathrm{e}^{x} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}}$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 2 (3 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Man leitet F mit der Produktregel ab und fasst zusammen; die Terme heben sich auf, bis genau f übrig bleibt (zwei BE). Mit dieser Stammfunktion wird das Integral über das Einsetzen der Grenzen berechnet und das Ergebnis exakt angegeben (eine BE). Eine Probe mit dem Taschenrechner ist möglich. Zwischenschritt: $F'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^{x} + (x^2-2x+2)\mathrm{e}^{x} = x^2\mathrm{e}^{x}$; damit $\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718$.

$F'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^{x} + (x^2-2x+2)\mathrm{e}^{x} = x^2\mathrm{e}^{x}$. (2 BE)

$\int_0^1 f\,dx = F(1) - F(0) = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718$. (1 BE)

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Zuerst berechnet man den Funktionswert im Punkt, also die zweite Koordinate von P (eine BE). Die Ableitung entsteht mit der Kettenregel und liefert die Steigung an der Stelle 1 (zwei BE). Mit der Punkt-Steigungs-Form wird die Tangentengleichung aufgestellt und vereinfacht (eine BE). Zwischenschritt: $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, also $f'(1) = 1$; mit $f(1) = \ln 2$ folgt $y = x - 1 + \ln 2$. Häufiger Fehler: die innere Ableitung $2x$ zu vergessen.

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $f'(1) = 1$, $f(1) = \ln 2$. Tangente: $y = x - 1 + \ln 2 \approx x - 0{,}307$. (4 BE)

Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Ableitung wird mit der Produktregel gebildet und der Faktor e^{-x} ausgeklammert; die Nullstellen ergeben sich aus dem verbleibenden

Faktor (zwei BE). Mit einer Vorzeichentabelle der Ableitung bestimmt man Minimum und Maximum und berechnet die zugehörigen Funktionswerte (drei BE).

a) $f'(x) = (2x - x^2)\mathrm{e}^{-x} = x(2 - x)\mathrm{e}^{-x}$; $f'(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = 2$. (2 BE)
b) Bei $x = 0$ wechselt f' von $-$ nach $+$: Tiefpunkt $T(0|0)$. Bei $x = 2$ wechselt f' von $+$ nach $-$: Hochpunkt $H(2|4\mathrm{e}^{-2}) \approx H(2|0{,}541)$. (3 BE)

Lösung zu Aufgabe 5 (2 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Abkühlungsgeschwindigkeit ist die Ableitung der Temperaturfunktion. Mit der Kettenregel bleibt der Exponentialterm erhalten und wird mit $-0{,}05$ multipliziert (eine BE). Setzt man $t = 20$ ein, erhält man die Rate in Grad pro Minute; das negative Vorzeichen bedeutet Abkühlung (eine BE). Zwischenschritt: $T'(t) = -3{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}$, also $T'(20) = -3{,}5\,\mathrm{e}^{-1} \approx -1{,}29\,^\circ\mathrm{C}$ pro Minute; zu Beginn waren es $-3{,}5\,^\circ\mathrm{C}$ pro Minute.

$T'(t) = -3{,}5\mathrm{e}^{-0{,}05t}$, $T'(20) = -3{,}5\mathrm{e}^{-1} \approx -1{,}29\,^\circ\mathrm{C}/\mathrm{min}$. (2 BE)