Lernzettel - Produktregel, Kettenregel und weitere Ableitungsregeln

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Einstieg: Wie schnell ändert sich das?

Eine Seifenblase wächst: Ihr Radius nimmt mit der Zeit zu, und ihr Volumen hängt vom Radius ab. Wie schnell wächst das Volumen? Dazu müssen Sie zwei Abhängigkeiten verketten: das Volumen hängt vom Radius ab, der Radius von der Zeit. Genau dafür ist die Kettenregel da. Ähnlich ist es bei einer Medikamentenkonzentration, die erst ansteigt und dann abklingt, etwa wie $c(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$: Ein Produkt aus einem wachsenden und einem fallenden Faktor, das nur mit der Produktregel abgeleitet werden kann.

Die Regeln dieses Kapitels sind das Werkzeug für alle Kurvendiskussionen in der Qualifikationsphase. Ohne Sicherheit beim Ableiten scheitern Extremwertaufgaben, Tangenten, Funktionenscharen und Nachweise von Stammfunktionen. Üben Sie deshalb das Zusammenspiel der drei Regeln, die Kontrolle des Ergebnisses und das geschickte Ausklammern.

Warum weitere Ableitungsregeln?

Definition: Produkte, Verkettungen oder Quotienten

Aus der Einführungsphase kennen Sie Summen-, Faktor- und Potenzregel. Funktionen wie $x \cdot \mathrm{e}^{x}$, $\sqrt{x^2+1}$ oder $\frac{x}{x^2+1}$ lassen sich damit nicht ableiten, denn sie sind **Produkte, Verkettungen oder Quotienten**. In der Qualifikationsphase und im Abitur sind diese Regeln unverzichtbar, besonders bei Funktionen mit e^{x}, $\ln x$ und trigonometrischen Termen.

Die Produktregel

Ist $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, dann gilt $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$. Merkregel: „Ableitung des ersten mal das zweite plus das erste mal Ableitung des zweiten.“ Typischer Fehler: einfach $u' \cdot v'$ rechnen.

Beispiel 1

$f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x}$. Mit $u = x^2$, $v = \mathrm{e}^{x}$ ist $u' = 2x$, $v' = \mathrm{e}^{x}$. Also $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x} + x^2\mathrm{e}^{x} = (x^2 + 2x)\mathrm{e}^{x}$. Ausklammern von e^{x} erleichtert später die Nullstellensuche, denn $\mathrm{e}^{x} > 0$.

Satz: Produktregel

Für differenzierbare u, v gilt $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Die Kettenregel

Definition: äußere

Bei einer Verkettung $f(x) = h(g(x))$ gibt es eine **äußere** Funktion h und eine **innere** Funktion g. Dann gilt $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$, also „äußere Ableitung mal innere Ableitung“. Vorgehen: innere Funktion erkennen, äußere ableiten und die innere unverändert einsetzen, mit der Ableitung der inneren multiplizieren.

Beispiel 2

$f(x) = (3x - 2)^4$. Innere Funktion $g(x) = 3x - 2$ mit $g' = 3$, äußere $h(z) = z^4$ mit $h'(z) = 4z^3$. Also $f'(x) = 4(3x - 2)^3 \cdot 3 = 12(3x - 2)^3$.

Beispiel 3

$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Innere $g(x) = -x^2$, $g'(x) = -2x$; äußere $h(z) = \mathrm{e}^z$. Es folgt $f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Dies ist die Ableitung der Gaußschen Glockenkurve, die in der Normalverteilung wiederkommt.

Beispiel 4

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/2}$. Dann $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Satz: Kettenregel

Für $f(x) = u\big(v(x)\big)$ gilt $f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$ (äußere mal innere Ableitung).

So gehst du vor: Kettenregel anwenden

1. Äußere Funktion u und innere Funktion v erkennen.
2. u' bilden und $v(x)$ einsetzen.
3. Mit $v'(x)$ multiplizieren.
4. Ergebnis vereinfachen und ausklammern.

Die Quotientenregel

Für $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ mit $v(x) \neq 0$ gilt $f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v(x)^2}$. Alternativ kann man den Quotienten als Produkt $u \cdot v^{-1}$ auffassen und Produkt- und Kettenregel verwenden.

Beispiel: $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ liefert $f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

Satz: Quotientenregel

Für $f=\dfrac{u}{v}$ mit $v\neq 0$ gilt $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Wichtige Ableitungen im Überblick

Regel: Wichtige Ableitungen im Überblick

- $(x^n)'=nx^{n-1}$
- $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$, $(\mathrm{e}^{ax+b})'=a\,\mathrm{e}^{ax+b}$
- $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ für $x>0$
- $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$
- $(\sin(ax+b))'=a\cos(ax+b)$

Anwendung: Tangente und Extremstellen

Definition: Tangente

Die **Tangente** an den Graphen von f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ hat die Gleichung $y=f'(x_0)\,(x-x_0)+f(x_0)$. Notwendig für ein lokales Extremum ist $f'(x_0)=0$; hinreichend ist zusätzlich $f''(x_0)\neq 0$ (Maximum bei f'', Minimum bei $f''>0$). Beispiel: $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}$ hat $f'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}$; Nullstelle $x=1$, und $f''(x)=(x-2)\mathrm{e}^{-x}$ bei $x=1$, also Hochpunkt .

Probe bei Stammfunktionen

Im Abitur wird oft verlangt: „Zeigen Sie, dass $F(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$ eine Stammfunktion von $f(x)=x\,\mathrm{e}^x$ ist.“ Man leitet F mit der Produktregel ab: $F'(x)=1\cdot\mathrm{e}^x+(x-1)\mathrm{e}^x=x\,\mathrm{e}^x=f(x)$. Die Produktregel ist also die Grundlage, Stammfunktionen von Produkten zu finden.

Ausführlich gerechnet: Produkt und Verkettung gemeinsam

Definition: Produkt

Viele Abituraufgaben verlangen, dass mehrere Regeln hintereinander angewendet werden. Wir leiten $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ ab. Zuerst erkennen wir die äußere Struktur: Es handelt sich um ein **Produkt** aus $u(x)=x$ und $v(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$. Die Ableitung von u ist $u'(x)=1$. Der Faktor v ist eine **Verkettung**: Die innere Funktion ist $-x^2$ mit Ableitung $-2x$, die äußere ist die e-Funktion. Also $v'(x)=-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Mit der Produktregel folgt

$f'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + x \cdot (-2x)\mathrm{e}^{-x^2} = (1 - 2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$. Da $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$ gilt, ist $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $1 - 2x^2 = 0$ ist, also bei $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0{,}71$.

Als zweites Beispiel betrachten wir $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Die äußere Funktion $\ln z$ hat die Ableitung $\frac{1}{z}$, die innere $x^2 + 1$ hat die Ableitung $2x$. Daher $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$. Die Ableitung ist null nur bei $x = 0$, und dort wechselt sie von negativ nach positiv: Der Graph hat bei $x = 0$ einen Tiefpunkt $T(0|0)$.

Zweite Ableitung

Für die Art eines Extrempunkts, für Wendepunkte und Krümmung braucht man die zweite Ableitung. Man leitet das Ergebnis der ersten Ableitung noch einmal ab, meist wieder mit Produkt- und Kettenregel. Beispiel: Aus $f'(x) = (1 - 2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$ folgt $f''(x) = -4x\,\mathrm{e}^{-x^2} + (1 - 2x^2)(-2x)\mathrm{e}^{-x^2} = (4x^3 - 6x)\mathrm{e}^{-x^2}$. Klammern Sie bei jedem Schritt den Faktor e^{-x^2} aus, damit die Terme übersichtlich bleiben und Sie mit $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$ argumentieren können.

Kontrolle der Ableitung

Definition: Zahlentest

Eine gute Kontrolle ist ein **Zahlentest**: Wählen Sie eine einfache Stelle, zum Beispiel $x = 1$, und berechnen Sie den Differenzenquotienten $\frac{f(1{,}001) - f(1)}{0{,}001}$ mit dem Taschenrechner. Er sollte nahe bei $f'(1)$ liegen. Außerdem können Sie prüfen, ob Vorzeichen und Monotonie zum Graphen passen: Wächst der Graph an der Stelle, muss f' positiv sein.

Mehrfache Verkettung und drei Faktoren

Treten mehrere Verkettungen ineinander auf, arbeiten Sie von außen nach innen und multiplizieren alle Teilableitungen: $\big(h(g(k(x)))\big)' = h'(g(k(x))) \cdot g'(k(x)) \cdot k'(x)$. In der Leibniz-Schreibweise sieht man das besonders gut: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$, die Differenziale „kürzen“ sich. Bei einem Produkt aus drei Faktoren leitet man jeden Faktor einmal ab: $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

Beispiel 5

Leiten Sie $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x^2)}$ ab.

Von außen nach innen: Die äußerste Funktion ist e^z mit der Ableitung e^z, dann folgt $\sin(w)$ mit $\cos(w)$, zuletzt $w = x^2$ mit $2x$. Also $f'(x) = \mathrm{e}^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x = 2x\cos(x^2)\,\mathrm{e}^{\sin(x^2)}$.

Beispiel 6

Leiten Sie $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x}\sin x$ ab.

Mit $u = x$, $v = \mathrm{e}^{x}$, $w = \sin x$ gilt
$f' = 1\cdot \mathrm{e}^{x}\sin x + x\,\mathrm{e}^{x}\sin x + x\,\mathrm{e}^{x}\cos x = \mathrm{e}^{x}\big((1+x)\sin x + x\cos x\big)$. Das Ausklammern von e^{x} ist auch hier der entscheidende Schritt für alles Weitere.

Brüche geschickt ableiten

Die Quotientenregel ist rechenintensiv. Bevor Sie sie anwenden, prüfen Sie, ob sich der Bruch vereinfachen lässt. Ist der Nenner nur ein Monom, trennen Sie den Bruch in eine Summe: $\frac{x^2+1}{x} = x + x^{-1}$ mit der Ableitung $1 - \frac{1}{x^2}$. Steht im Nenner eine Verkettung, ist die Schreibweise als Produkt mit negativer Potenz oft einfacher: $\frac{x}{\mathrm{e}^{x}} = x\,\mathrm{e}^{-x}$ mit $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$. Die Quotientenregel brauchen Sie wirklich nur, wenn Zähler und Nenner beide von x abhängen und sich nichts kürzen lässt, etwa bei $\frac{x}{x^2+1}$.

Beispiel 7

Bestimmen Sie die Extrempunkte von $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Es ist $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. Der Nenner ist stets positiv, also entscheidet der Zähler: $1 - x^2 = 0$ für $x = \pm 1$. Bei $x = -1$ wechselt f' von Minus nach Plus (Tiefpunkt $T(-1\,|\,-\frac{1}{2})$), bei $x = 1$ von Plus nach Minus (Hochpunkt $H(1\,|\,\frac{1}{2})$). Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn $f(-x) = -f(x)$.

Ableitungen mit Parameter

In Funktionenscharen steht neben x ein Parameter a oder k. Beim Ableiten nach x wird der Parameter wie eine Zahl behandelt. Besonders wichtig ist das bei Exponentialfunktionen: Aus $f_a(x) = x\,\mathrm{e}^{-ax}$ folgt $f_a'(x) = (1-ax)\mathrm{e}^{-ax}$, und die Nullstelle der Ableitung ist $x = \frac{1}{a}$. Die Lage des Hochpunkts hängt also vom Parameter ab; die Menge aller Hochpunkte nennt man Ortskurve.

Beispiel 8

Zeigen Sie, dass $F(x) = (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^{x}$ eine Stammfunktion von $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x}$ ist.

Produktregel mit $u = x^2 - 2x + 2$, $u' = 2x - 2$, $v = \mathrm{e}^{x}$:
$F'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^{x} + (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^{x} = x^2\mathrm{e}^{x} = f(x)$. Die Stammfunktion wurde dabei nur nachgeprüft, nicht gefunden – das ist im Abitur meistens verlangt.

So zeigen Sie Ihren Rechenweg im Abitur

Bei Ableitungen werden im Abitur nicht nur Ergebnisse, sondern auch nachvollziehbare

Rechenwege bewertet. Bewährt hat sich eine feste Schrittfolge: Zuerst benennen Sie die Struktur des Terms in einem Halbsatz („Produkt aus x und einer Verkettung“), dann notieren Sie die Teilfunktionen und ihre Ableitungen übersichtlich nebeneinander, setzen in die Regel ein und klammern am Ende gemeinsame Faktoren aus. Das spart Zeit beim Weiterrechnen, weil Nullstellen und Vorzeichen der Ableitung dann sofort ablesbar sind.

Beispiel 9

Bestimmen Sie die Stelle, an der die Funktion $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $(x > 0)$ ihr Maximum annimmt.

Struktur: Quotient mit $u = \ln x$, $u' = \frac{1}{x}$, $v = x$, $v' = 1$. Dann ist $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Der Nenner ist positiv, also gilt $f'(x) = 0$ genau für $\ln x = 1$, das heißt $x = \mathrm{e}$. Für x ist $f' > 0$, für $x > \mathrm{e}$ ist f': Es liegt ein Hochpunkt vor. Diese Funktion taucht im Abitur immer wieder auf, zum Beispiel beim Vergleich von e^{π} und π^{e}.

Wusstest du? Zwei Namen, eine Regel

Die Produktregel geht auf Leibniz zurück. Er schrieb sie 1675 als $d(uv) = u\,dv + v\,du$ auf und bemerkte zunächst selbst, dass $d(uv) = du\,dv$ naheliegend, aber falsch ist. Wer heute $u' \cdot v'$ schreibt, macht also einen historisch berühmten Fehler. Die Kettenregel in der Form $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ lässt sich als Bruchrechnung merken und erklärt, warum die innere Ableitung nie fehlen darf.

Welche Regel wann?

Vor dem Ableiten lohnt ein kurzer Blick auf den Aufbau des Terms. Werden zwei Funktionen multipliziert, braucht man die Produktregel; steht eine Funktion in einer anderen, die Kettenregel; ist der Term ein Bruch mit x im Nenner, die Quotientenregel oder eine Umformung in eine Potenz. Komplizierte Terme zerlegt man von außen nach innen. Wer diese Reihenfolge einhält, vergisst keine innere Ableitung.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$; bei drei Faktoren wird jeder Faktor einmal abgeleitet und die übrigen bleiben stehen.
- Kettenregel: $\big(h(g(x))\big)' = h'(g(x)) \cdot g'(x)$ – äußere Ableitung mal innere Ableitung; bei mehrfacher Verkettung von außen nach innen vorgehen.
- Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; oft ist es einfacher, den Bruch zuerst zu kürzen oder als Produkt $u \cdot v^{-1}$ zu schreiben.
- Wichtige Ableitungen: $(\mathrm{e}^{ax+b})' = a\,\mathrm{e}^{ax+b}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\ln(ax+b))' = \frac{a}{ax+b}$, $(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$, $(\cos x)' = -\sin x$.
- Nach dem Ableiten den Faktor $\mathrm{e}^{g(x)}$ ausklammern: Da er stets positiv ist,

entscheidet nur der andere Faktor über Nullstellen und Vorzeichen der Ableitung.
- Tangente in $P(x_0|f(x_0))$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; Extremstellen verlangen $f'(x_0) = 0$ und einen Vorzeichenwechsel von f' (oder $f''(x_0) \neq 0$).
- Probe bei Stammfunktionen: $F' = f$ wird mit Produkt- und Kettenregel nachgewiesen; das ist im Abitur eine typische Nachweisaufgabe.
- Kontrolle der Ableitung durch einen Zahlentest: Der Differenzenquotient mit $h = 0{,}001$ liegt nahe bei $f'(x)$.

Achtung: Typische Fehler

- Bei der Kettenregel die innere Ableitung vergessen: $(\mathrm{e}^{2x})' = 2\mathrm{e}^{2x}$, nicht e^{2x}.
- Bei der Produktregel $u'v'$ statt $u'v + uv'$.
- Bei der Quotientenregel Zähler vertauschen ($u'v - uv'$, nicht umgekehrt) und das Quadrat im Nenner vergessen.
- Nach dem Ableiten nicht ausklammern und deshalb die Nullstellen nicht finden.

Ottos Tipp: Schreibe erst u, u', v, v' hin, dann setze ein. So passieren kaum Vorzeichenfehler, und du kannst die Ableitung am Ende immer mit einem Wert testen.

Ottos Tipp

Prüfen Sie nach jeder Ableitung mit einem Taschenrechnerwert: Vergleichen Sie $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ für $h = 0{,}001$ mit $f'(x)$. Das fängt Vorzeichen- und Klammerfehler sofort ab.