Arbeitsblatt - Produktregel, Kettenregel und weitere Ableitungsregeln

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Produktregel anwenden

Bestimmen Sie die Ableitung mit der Produktregel. Schreiben Sie dazu u, u', v und v' auf und klammern Sie anschließend aus.

a) $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$
b) $f(x) = (x+1)\sin x$
c) $f(x) = x\ln x$ für $x > 0$
d) $f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Kettenregel anwenden

Bestimmen Sie die Ableitung mit der Kettenregel. Benennen Sie die innere und die äußere Funktion.

a) $f(x) = (3x-2)^4$
b) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$
c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
d) $f(x) = \ln(3x+1)$ für $x > -\frac{1}{3}$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Quotientenregel anwenden

Bestimmen Sie die Ableitung. Prüfen Sie jeweils, ob sich die Quotientenregel vermeiden lässt.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$
c) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ für $x \neq 0$
d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ für $x \neq 0$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Regeln kombinieren

Hier müssen zwei Regeln nacheinander angewendet werden. Leiten Sie ab und klammern Sie aus.

a) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$
b) $f(x) = \ln(x^2+1)$
c) $f(x) = \mathrm{e}^{x}\sin(2x)$
d) $f(x) = (x^2+1)^3\mathrm{e}^{x}$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Stammfunktion nachweisen

Zeigen Sie durch Ableiten, dass F eine Stammfunktion von f ist.

a) $F(x) = (x-1)\mathrm{e}^{x}$, $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x}$
b) $F(x) = x\ln x - x$, $f(x) = \ln x$ für $x > 0$
c) $F(x) = (x^2-2x+2)\mathrm{e}^{x}$, $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x}$
d) $F(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$, $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Zweite Ableitung

Bestimmen Sie f' und f'' und vereinfachen Sie jeweils durch Ausklammern.

a) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$
b) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$
c) $f(x) = \ln(x^2+1)$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Tangente an die Kurve

Gegeben ist $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Ursprung.
b) Bestimmen Sie die Tangente im Punkt $P(2\,|\,f(2))$.
c) Welche Steigung hat die Tangente im Hochpunkt? Bestimmen Sie diesen Punkt.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Der abkühlende Kaffee

Ein Kaffee kühlt nach $T(t) = 20 + 70\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}$ (in $^\circ\mathrm{C}$, t in Minuten) ab.

a) Bestimmen Sie die Abkühlungsrate $T'(t)$.
b) Wie schnell kühlt der Kaffee zu Beginn und nach 20 Minuten ab?

c) Wann beträgt die Abkühlungsrate $1\,^{\circ}\mathrm{C}$ pro Minute?
d) Auf welchen Wert strebt die Temperatur?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Das Medikament im Blut

Die Konzentration eines Medikaments im Blut (in mg pro Liter) wird nach der Einnahme durch $c(t) = 20\,t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ (t in Stunden) beschrieben.

a) Bestimmen Sie $c'(t)$ und den Zeitpunkt der höchsten Konzentration.
b) Wie groß ist die höchste Konzentration?
c) Bestimmen Sie $c''(t)$ und den Zeitpunkt, zu dem die Konzentration am schnellsten abnimmt.
d) Beurteilen Sie, wie viel noch nach 10 Stunden im Blut ist.

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Die Durchschnittskosten

Die Gesamtkosten eines Betriebs betragen $K(x) = x^2 + 50$ (in Euro, x Stück). Die Stückkosten sind $k(x) = \frac{K(x)}{x}$.

a) Bestimmen Sie $k'(x)$ mit der Quotientenregel.
b) Bei welcher Stückzahl sind die Stückkosten am kleinsten?
c) Wie hoch sind sie dann, und wie lauten die Grenzkosten $K'(x)$ an dieser Stelle?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Wie schnell wächst die Seifenblase?

Der Radius einer Seifenblase wächst nach $r(t) = 0{,}5\sqrt{t}$ (in dm, t in Sekunden). Ihr Volumen ist $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

a) Bestimmen Sie $r'(t)$.
b) Bestimmen Sie $\frac{dV}{dt}$ mit der Kettenregel.
c) Wie schnell wächst das Volumen bei $t = 4$ s?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Die Federschwingung

Ein Federpendel schwingt nach $x(t) = 0{,}1\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}\cos(2t)$ (in m, t in s).

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v(t) = x'(t)$.
b) Wie groß ist $v(0)$?
c) Wann kehrt das Pendel zum ersten Mal nach $t = 0$ um ($v = 0$)? Wo befindet es sich dann?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Zahlentest

Kontrollieren Sie die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ an der Stelle $x = 1$ mit dem Differenzenquotienten.

a) Berechnen Sie $f'(1)$ mit der Ableitungsregel.
b) Berechnen Sie $\frac{f(1{,}001) - f(1)}{0{,}001}$.
c) Vergleichen Sie beide Werte.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Kurvendiskussion mit e-Funktion

Gegeben ist $f(x) = (x^2 - 2x)\,\mathrm{e}^x$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und das Verhalten für $x \to -\infty$.
b) Berechnen Sie f' und f''.
c) Bestimmen Sie die Extrempunkte und ihre Art.
d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Ursprung.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Die Logarithmuskurve

Gegeben ist $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

a) Zeigen Sie, dass der Graph symmetrisch zur y-Achse ist und bestimmen Sie das Extremum.
b) Zeigen Sie, dass $f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$ gilt.
c) Bestimmen Sie die Wendepunkte.
d) Bestimmen Sie die Tangente im Wendepunkt mit $x > 0$.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Eine Schar mit Ortskurve

Gegeben ist die Schar $f_a(x) = x\,\mathrm{e}^{-ax}$ mit $a > 0$.

a) Bestimmen Sie $f_a'(x)$ und $f_a''(x)$.
b) Bestimmen Sie den Hochpunkt H_a in Abhängigkeit von a.
c) Bestimmen Sie die Ortskurve der Hochpunkte.
d) Für welches a hat der Hochpunkt die y-Koordinate $\frac{1}{2\mathrm{e}}$?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Tangenten durch den Ursprung

Von einem Punkt außerhalb des Graphen sind Tangenten an die Kurve zu legen.

a) Bestimmen Sie die Tangente an $f(x) = \mathrm{e}^x$, die durch den Ursprung verläuft.
b) Bestimmen Sie die Tangente an $g(x) = \ln x$, die durch den Ursprung verläuft.
c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen beiden Berührpunkten?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Der Kehrwert und der Quotient

Die Quotientenregel lässt sich aus der Produktregel und der Kettenregel herleiten.

a) Zeigen Sie mit der Kettenregel: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.
b) Leiten Sie daraus mit der Produktregel $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ her.
c) Wenden Sie das Ergebnis auf $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ an.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Düngung und Ernteertrag

Auf einem Versuchsfeld hängt der Ertrag E (in dt pro Hektar) von der ausgebrachten Düngermenge d (in kg pro 10 Hektar) ab: $E(d) = 40\,d\,\mathrm{e}^{-0{,}2d} + 20$ für $d \geq 0$. Der Landwirt will wissen, wie viel Dünger sich lohnt.

a) Bestimmen Sie $E'(d)$ und die Düngermenge mit dem höchsten Ertrag.
b) Berechnen Sie den höchsten Ertrag und den Ertrag ohne Düngung.
c) Bestimmen Sie $E''(d)$ und die Stelle, an der der Ertrag am schnellsten abnimmt.
d) Wie groß ist der Grenzertrag (Ertragszuwachs pro kg) bei $d = 2$?
e) Beurteilen Sie in einem Satz, warum es sinnlos ist, mehr als 5 kg zu düngen.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Fehler finden

In den folgenden Rechnungen steckt jeweils ein Fehler. Beschreiben Sie den Fehler und korrigieren Sie.

a) $(x^2\mathrm{e}^x)' = 2x\,\mathrm{e}^x$
b) $(\mathrm{e}^{3x})' = \mathrm{e}^{3x}$
c) $\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1 \cdot (x+1) + x \cdot 1}{(x+1)^2}$
d) $\big((2x+1)^3\big)' = 3(2x+1)^2$