Lösungen - Produktregel, Kettenregel und weitere Ableitungsregeln

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Bei der Produktregel schreibt man zuerst u, u', v und v' auf und setzt in $f' = u'v + uv'$ ein. Anschließend klammert man gemeinsame Faktoren wie e^x aus, damit das Ergebnis übersichtlich wird und Nullstellen leicht abzulesen sind.

a) $u = x^2$, $u' = 2x$, $v = \mathrm{e}^x$, $v' = \mathrm{e}^x$: $f'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2 + 2x)\mathrm{e}^x$.
b) $f'(x) = 1 \cdot \sin x + (x + 1)\cos x$.
c) $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$.
d) $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + (2x - 1)(-\mathrm{e}^{-x}) = (3 - 2x)\mathrm{e}^{-x}$.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Bei der Kettenregel benennt man innere und äußere Funktion. Man leitet die äußere Funktion ab, lässt die innere unverändert stehen und multipliziert mit der Ableitung der inneren Funktion. Die Wurzel schreibt man vorher als Potenz mit Exponent $\frac{1}{2}$.

a) Innere $3x - 2$, äußere z^4: $f'(x) = 4(3x - 2)^3 \cdot 3 = 12(3x - 2)^3$.
b) Innere x^2, äußere e^z: $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$.
c) $f = (x^2 + 1)^{1/2}$: $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
d) $f'(x) = \frac{1}{3x+1} \cdot 3 = \frac{3}{3x+1}$.

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg: Die Quotientenregel lautet $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Vorher prüft man, ob man den Bruch in eine Summe zerlegen kann; dann geht es mit der Potenzregel schneller. Das Ergebnis wird im Zähler vereinfacht.

a) $f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$.
b) Besser kürzen: $f(x) = x + \frac{1}{x}$, also $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
c) $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \cdot x - \mathrm{e}^x \cdot 1}{x^2} = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$.
d) $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Hier sind zwei Regeln nacheinander nötig, meist Produkt- und Kettenregel. Man arbeitet von außen nach innen: zuerst die Produktregel für die Faktoren, dann die Kettenregel für einen verketteten Faktor. Am Ende wird

ausgeklammert.

a) Produkt: $f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} + x \cdot (-2x)\mathrm{e}^{-x^2} = (1 - 2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$.
b) $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$.
c) $f'(x) = \mathrm{e}^x \sin(2x) + \mathrm{e}^x \cdot 2\cos(2x) = \mathrm{e}^x\big(\sin(2x) + 2\cos(2x)\big)$.
d) $f'(x) = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x\,\mathrm{e}^x + (x^2+1)^3\mathrm{e}^x = (x^2+1)^2\big(x^2+6x+1\big)\mathrm{e}^x$.

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Um eine Stammfunktion nachzuweisen, leitet man F ab und vergleicht mit f. Meist braucht man die Produktregel; nach dem Zusammenfassen müssen sich die übrigen Terme gegenseitig aufheben, bis genau $f(x)$ übrig bleibt.

a) $F'(x) = \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x$.
b) $F'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.
c) $F'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^x + (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x$.
d) Kettenregel: $F'(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Die erste Ableitung wird mit Produkt- oder Kettenregel gebildet und vereinfacht. Für die zweite Ableitung wendet man die Regeln erneut auf das vereinfachte Ergebnis an. Ausklammern der Exponentialfunktion macht beide Ableitungen kompakt.

a) $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$, $f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$.
b) $f'(x) = (2x - x^2)\mathrm{e}^{-x}$, $f''(x) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x} - (2x-x^2)\mathrm{e}^{-x} = (x^2 - 4x + 2)\mathrm{e}^{-x}$.
c) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: Für eine Tangente braucht man den Funktionswert und die Steigung im Berührpunkt. Die Steigung ist die Ableitung an dieser Stelle. Mit der Punkt-Steigungs-Form erhält man die Gleichung; im Hochpunkt ist die Steigung null.

a) $f'(0) = 1$, also $y = x$.
b) $f'(2) = (1-2)\mathrm{e}^{-2} = -\mathrm{e}^{-2}$, $f(2) = 2\mathrm{e}^{-2}$: $y = -\mathrm{e}^{-2}(x-2) + 2\mathrm{e}^{-2} = \mathrm{e}^{-2}(4-x)$.
c) Steigung 0; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$, $f''(1) = -\mathrm{e}^{-1}$: Maximum.

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: Die Abkühlungsrate ist die Ableitung der Temperaturfunktion; mit der Kettenregel bleibt die e-Funktion erhalten. Durch Einsetzen erhält man die Rate zu bestimmten Zeiten. Ein negatives Vorzeichen bedeutet Abkühlung.

a) $T'(t) = 70 \cdot (-0{,}05)\mathrm{e}^{-0{,}05t} = -3{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}$.
b) $T'(0) = -3{,}5\,^\circ\mathrm{C/min}$; $T'(20) = -3{,}5\mathrm{e}^{-1} \approx -1{,}29\,^\circ\mathrm{C/min}$.
c) $3{,}5\mathrm{e}^{-0{,}05t} = 1 \Rightarrow t = 20\ln 3{,}5 \approx 25{,}1$ min.

d) Gegen die Raumtemperatur von $20\,^{\circ}\mathrm{C}$, denn $\mathrm{e}^{-0{,}05t} \to 0$.

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Die Ableitung der Konzentration entsteht mit Produkt- und Kettenregel. Ihre Nullstelle liefert den Zeitpunkt der höchsten Konzentration. Die zweite Ableitung oder der Vorzeichenwechsel bestätigt das Maximum; der Wendepunkt zeigt den stärksten Abbau.

a) $c'(t) = 20\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 10t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 10(2-t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$; $c'(t) = 0$ für $t = 2$, Vorzeichenwechsel $+ \to -$.
b) $c(2) = 40\mathrm{e}^{-1} \approx 14{,}7$ mg/l.
c) $c''(t) = -10\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 5(2-t)\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 5(t-4)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$; Nullstelle $t = 4$ mit Vorzeichenwechsel: Wendepunkt, dort ist c' minimal (stärkste Abnahme), $c(4) = 80\mathrm{e}^{-2} \approx 10{,}8$ mg/l.
d) $c(10) = 200\mathrm{e}^{-5} \approx 1{,}35$ mg/l, also nur noch etwa $9\,\%$ des Höchstwertes.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Die Stückkosten sind ein Quotient; man leitet mit der Quotientenregel ab oder zerlegt vorher in eine Summe. Die Nullstelle der Ableitung liefert die Menge mit den geringsten Stückkosten.

a) $k'(x) = \frac{2x\cdot x - (x^2+50)}{x^2} = \frac{x^2-50}{x^2}$.
b) $k'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{50} \approx 7{,}07$; Vorzeichenwechsel $- \to +$: Minimum.
c) $k(\sqrt{50}) = \frac{100}{\sqrt{50}} = 2\sqrt{50} \approx 14{,}14\,€$. Grenzkosten $K'(x) = 2x = 2\sqrt{50}$: gleich den Stückkosten (Betriebsoptimum).

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: Das Volumen hängt über den Radius von der Zeit ab. Mit der Kettenregel gilt $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$. Man setzt die Ableitungen ein und vereinfacht.

a) $r'(t) = \frac{0{,}25}{\sqrt{t}}$.
b) $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot r'(t)$.
c) $r(4) = 1$, $r'(4) = 0{,}125$: $\frac{dV}{dt} = 4\pi \cdot 1 \cdot 0{,}125 = 0{,}5\pi \approx 1{,}57\,\mathrm{dm}^3/\mathrm{s}$.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Auslenkung; das Produkt aus gedämpfter e-Funktion und Kosinus wird mit der Produktregel abgeleitet. Die Nullstellen der Auslenkung zeigen, wann das Pendel durch die Ruhelage geht.

a) $v(t) = 0{,}1\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}\big(-0{,}2\cos(2t) - 2\sin(2t)\big)$.
b) $v(0) = -0{,}02$ m/s.
c) $\tan(2t) = -0{,}1 \Rightarrow 2t = \pi - 0{,}0997 \Rightarrow t \approx 1{,}52$ s; $x \approx -0{,}0734$ m (Auslenkung nach links).

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Der Differenzenquotient mit sehr kleinem h ist eine Näherung der Ableitung. Man berechnet beide Werte und vergleicht sie. Die geringe Abweichung bestätigt die mit der Kettenregel berechnete Ableitung.

a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}70711$.

b) $\frac{\sqrt{2{,}002001}-\sqrt{2}}{0{,}001} \approx 0{,}70728$.

c) Die Werte unterscheiden sich erst in der 4. Nachkommastelle, die Ableitung ist plausibel.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Die Nullstellen ergeben sich aus dem Faktor $x^2 - 2x$, weil die e-Funktion nie null wird. Erste und zweite Ableitung entstehen mit der Produktregel. Extrem- und Wendestellen sind die Nullstellen der Ableitungen mit Vorzeichenwechsel.

a) $x(x-2)\mathrm{e}^x = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 2$. Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to 0$ (die e-Funktion dominiert).

b) $f'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^x + (x^2-2x)\mathrm{e}^x = (x^2-2)\mathrm{e}^x$;
$f''(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + (x^2-2)\mathrm{e}^x = (x^2+2x-2)\mathrm{e}^x$.

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$. $f''(-\sqrt{2}) = (2-2\sqrt{2}-2)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$: Hochpunkt; $f''(\sqrt{2}) > 0$: Tiefpunkt

$T(\sqrt{2}\,|\,(2-2\sqrt{2})\mathrm{e}^{\sqrt{2}}) \approx T(1{,}41\,|\,-3{,}41)$.

d) $f'(0) = -2$, also $y = -2x$.

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Die Symmetrie zeigt man mit $f(-x) = f(x)$. Die Ableitungen entstehen mit Ketten- und Quotientenregel. Das Extremum liegt bei der Nullstelle der ersten, die Wendepunkte bei den Nullstellen der zweiten Ableitung.

a) $f(-x) = f(x)$. $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x = 0$, f' wechselt von $-$ nach $+$: Tiefpunkt $T(0|0)$.

b) Quotientenregel: $f''(x) = \frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

c) $f'' = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ mit Vorzeichenwechsel; $f(\pm 1) = \ln 2 \approx 0{,}693$: Wendepunkte $W_{1,2}(\pm 1\,|\,\ln 2)$.

d) $f'(1) = 1$: $y = 1\cdot(x-1) + \ln 2 = x - 1 + \ln 2$.

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: Der Parameter a wird beim Ableiten wie eine Zahl behandelt. Aus der Nullstelle der Ableitung folgt der Hochpunkt in Abhängigkeit von a. Eliminiert man a, erhält man die Ortskurve der Hochpunkte.

a) $f_a'(x) = (1-ax)\mathrm{e}^{-ax}$, $f_a''(x) = \big(-a - a(1-ax)\big)\mathrm{e}^{-ax} = a(ax-2)\mathrm{e}^{-ax}$.

b) $f_a'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a}$; $f_a''(\frac{1}{a}) = -a\mathrm{e}^{-1}$; .
c) Aus $x = \frac{1}{a}$ folgt $a = \frac{1}{x}$, also $y = \frac{x}{\mathrm{e}}$: Ortskurve ist die Gerade $y = \frac{x}{\mathrm{e}}$ (für $x > 0$).
d) $\frac{1}{a\mathrm{e}} = \frac{1}{2\mathrm{e}} \Rightarrow a = 2$.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: Gesucht ist der Berührpunkt. Man stellt die Tangente in einem allgemeinen Punkt u auf und verlangt, dass sie durch den vorgegebenen Punkt geht. Daraus entsteht eine Gleichung für u.

a) Ansatz: Tangente in x_0: $y = \mathrm{e}^{x_0}(x - x_0) + \mathrm{e}^{x_0}$. Durch $(0|0)$: $0 = \mathrm{e}^{x_0}(1 - x_0) \Rightarrow x_0 = 1$. Tangente $y = \mathrm{e}\,x$.
b) $g'(x_0) = \frac{1}{x_0}$: $0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0) + \ln x_0 = -1 + \ln x_0 \Rightarrow x_0 = \mathrm{e}$. Tangente $y = \frac{x}{\mathrm{e}}$.
c) Beide Funktionen sind Umkehrfunktionen voneinander. Die Berührpunkte $(1|\mathrm{e})$ und $(\mathrm{e}|1)$ liegen spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden $y = x$, ebenso die Tangenten mit den Steigungen e und $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Man schreibt $\frac{1}{v}$ als v^{-1} und leitet mit der Kettenregel ab. Dann schreibt man $\frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v}$ und wendet die Produktregel an. Nach dem Zusammenfassen auf einen Bruch entsteht die Quotientenregel.

a) $\frac{1}{v} = v^{-1}$; äußere Funktion z^{-1} mit der Ableitung $-z^{-2}$, innere v: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -v^{-2} \cdot v' = -\frac{v'}{v^2}$.
b) $\frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v}$: $\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
c) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Der Ertrag wird mit der Produktregel abgeleitet und die e-Funktion ausgeklammert. Die Nullstelle der Ableitung liefert die ertragreichste Düngermenge, die zweite Ableitung den Wendepunkt. Der Grenzertrag ist die Ableitung an einer Stelle.

a) $E'(d) = 40\,\mathrm{e}^{-0{,}2d} - 8d\,\mathrm{e}^{-0{,}2d} = 8(5 - d)\,\mathrm{e}^{-0{,}2d}$; $E'(d) = 0$ für $d = 5$, Vorzeichenwechsel $+ \to -$: Maximum.
b) $E(5) = 200\mathrm{e}^{-1} + 20 \approx 93{,}6$ dt/ha; $E(0) = 20$ dt/ha.
c) $E''(d) = -8\mathrm{e}^{-0{,}2d} - 1{,}6(5 - d)\mathrm{e}^{-0{,}2d} = 1{,}6(d - 10)\mathrm{e}^{-0{,}2d}$; Nullstelle $d = 10$ mit Vorzeichenwechsel: Wendepunkt, dort ist E' minimal; $E(10) = 400\mathrm{e}^{-2} + 20 \approx 74{,}1$ dt/ha.
d) $E'(2) = 8 \cdot 3\,\mathrm{e}^{-0{,}4} \approx 16{,}1$ dt/ha je kg.
e) Ab 5 kg nimmt der Ertrag wieder ab: Zusätzlicher Dünger kostet Geld und senkt den Ertrag.

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: In jeder Rechnung sucht man die Regel, die falsch oder gar nicht angewendet wurde. Typisch sind ein vergessener Summand der Produktregel, eine fehlende innere Ableitung oder ein Vorzeichenfehler. Die korrigierte Ableitung wird vollständig angegeben.

a) Es wurde $u' \cdot v'$ gerechnet. Richtig: $2x\mathrm{e}^{x} + x^{2}\mathrm{e}^{x} = (x^{2} + 2x)\mathrm{e}^{x}$.
b) Die innere Ableitung fehlt. Richtig: $3\mathrm{e}^{3x}$.
c) Im Zähler muss $u'v - uv'$ stehen. Richtig: $\frac{(x+1)-x}{(x+1)^{2}} = \frac{1}{(x+1)^{2}}$.
d) Die innere Ableitung 2 fehlt. Richtig: $6(2x+1)^{2}$.