# Lösungen zur Klassenarbeit - Normalverteilung

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · Dauer: 60 Minuten · /20

## Lösung zu Aufgabe 1 (6 BE/Punkte)

**Lösungsweg und Bewertung:** Für jede Wahrscheinlichkeit wird zuerst standardisiert und dann $\Phi$ abgelesen; Intervalle ergeben sich als Differenz zweier Werte (drei BE). Die Anzahl der Saftäpfel ist Anteil mal Gesamtzahl (eine BE). Für die schwersten fünf Prozent bestimmt man das $95\,\%$-Quantil und rechnet mit $x = \mu + z\sigma$ zurück (zwei BE).

a) $\Phi(-1{,}5) \approx 0{,}0668$. (1 BE)
b) $\Phi(1{,}5) - \Phi(-1) \approx 0{,}9332 - 0{,}1587 = 0{,}7745$. (2 BE)
c) $\Phi(-2) \approx 0{,}0228$; $5\,000 \cdot 0{,}0228 \approx 114$ Äpfel. (1 BE)
d) $c = 150 + 1{,}645 \cdot 10 \approx 166{,}4$ g. (2 BE)

## Lösung zu Aufgabe 2 (5 BE/Punkte)

**Lösungsweg und Bewertung:** Zuerst werden Erwartungswert und Standardabweichung berechnet und die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ geprüft (zwei BE). Dann wird mit der Normalverteilung genähert; die Grenzen werden mit der Stetigkeitskorrektur um eine halbe Einheit nach außen verschoben, standardisiert und eingesetzt (drei BE). Der exakte Wert dient zum Vergleich. Zwischenschritt: Die $z$-Werte sind $\frac{10{,}5}{7{,}07} \approx 1{,}48$ und $\frac{-5{,}5}{7{,}07} \approx -0{,}78$. Häufiger Fehler: die Stetigkeitskorrektur an der unteren Grenze nach innen statt nach außen zu verschieben.

a) $\mu = 100$, $\sigma = \sqrt{50} \approx 7{,}07 > 3$: erfüllt. (2 BE)
b) $\Phi\left(\frac{110{,}5-100}{7{,}07}\right) - \Phi\left(\frac{94{,}5-100}{7{,}07}\right) \approx 0{,}7129$ (exakt: $0{,}7129$). (3 BE)

## Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

**Lösungsweg und Bewertung:** Für die aktuelle Einstellung wird die Grenze $1\,000$ standardisiert und der Anteil abgelesen (eine BE). Für die neue Einstellung bleibt $\sigma$ fest; aus der Bedingung $\Phi(z) \leq 0{,}01$ folgt der zugehörige $z$-Wert, und die Ungleichung wird nach $\mu$ aufgelöst (drei BE). Ein Antwortsatz nennt den Sollwert. Kontrolle: Bei $\mu \approx 1\,011{,}6$ g liegt die Grenze $1\,000$ g genau $2{,}326$ Standardabweichungen unter dem Mittelwert, wie für $1\,\%$ gefordert.

a) $\Phi(-1) \approx 0{,}1587$. (1 BE)
b) $\frac{1000-\mu}{5} \leq -2{,}326 \Rightarrow \mu \geq 1000 + 2{,}326 \cdot 5 \approx 1011{,}6$ g. (3 BE)

## Lösung zu Aufgabe 4 (3 BE/Punkte)

**Lösungsweg und Bewertung:** Die gegebene Wahrscheinlichkeit wird in $\Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right) = 0{,}8413$ umgeschrieben; der zugehörige $z$-Wert ist $1$, also folgt $\sigma$ direkt (zwei

BE). Mit diesem $\sigma$ wird die Intervallwahrscheinlichkeit symmetrisch um $\mu$ berechnet (eine BE). Einheiten und Rundung werden im Antwortsatz angegeben. Zwischenschritt: $P(X \geq 26) = 1 - \Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right) = 0{,}1587$ ergibt $\Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right) = 0{,}8413$. Die Grenzen $17$ und $23$ liegen dann $\pm 0{,}5\sigma$ von $\mu$ entfernt. Häufig wird das Gegenereignis vergessen.

a) $\Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right) = 0{,}8413 \Rightarrow \frac{6}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 6$. (2 BE)
b) $2\Phi(0{,}5) - 1 \approx 0{,}3829$. (1 BE)

## Lösung zu Aufgabe 5 (2 BE/Punkte)

**Lösungsweg und Bewertung:** Die Ableitung entsteht mit der Kettenregel; der Faktor $-x$ kommt aus der inneren Ableitung, und die Nullstelle der Ableitung liefert den Hochpunkt (eine BE). Die zweite Ableitung mit der Produktregel ergibt den Faktor $x^2 - 1$; seine Nullstellen mit Vorzeichenwechsel sind die Wendestellen (eine BE).

a) Kettenregel: $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \cdot (-x) = -x\varphi(x)$; $\varphi' = 0 \Leftrightarrow x = 0$, Hochpunkt $(0|0{,}3989)$. (1 BE)
b) $\varphi''(x) = (x^2 - 1)\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, mit Vorzeichenwechsel. (1 BE)