Lernzettel - Normalverteilung

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Einstieg: Brezeln aus der Backstube

In einer Bäckerei in München werden jeden Morgen $2\,000$ Laugenbrezeln gebacken. Die Brezeln sollen 80 g wiegen, doch keine wiegt genau gleich viel: Mal ist der Teigstrang etwas dicker, mal etwas dünner. Wiegt man viele Brezeln und zeichnet ein Histogramm mit immer feineren Klassen, entsteht eine glockenförmige Kurve. Die meisten Brezeln liegen nahe bei 80 g, sehr leichte und sehr schwere sind selten.

Diese Glockenkurve beschreibt erstaunlich viele Messgrößen: Körpergrößen, Füllmengen, Fahrzeiten, Messfehler. Weil eine Masse jeden Wert eines Intervalls annehmen kann, braucht man eine **stetige** Zufallsgröße. Wahrscheinlichkeiten sind dann keine Balkenhöhen mehr, sondern Flächen unter einer Kurve – hier verbinden sich Stochastik und Integralrechnung.

Stetige Zufallsgrößen und Dichtefunktion

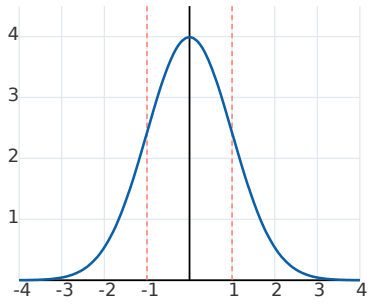
Definition: Dichtefunktion

Größen wie Körpergröße, Füllmenge einer Flasche oder Messfehler können beliebige Werte in einem Intervall annehmen. Man beschreibt sie durch eine **Dichtefunktion** f, die nirgends negativ ist und insgesamt den Flächeninhalt 1 mit der x-Achse einschließt. Die Wahrscheinlichkeit eines Intervalls ist ein Flächeninhalt: $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$. Für einzelne Werte gilt $P(X = a) = 0$; deshalb ist es unerheblich, ob die Intervallgrenzen mitgezählt werden ($\le$ oder $<$). Das ist ein wichtiger Unterschied zur diskreten Binomialverteilung.

Die Normalverteilung

Definition: normalverteilt

Viele Zufallsgrößen sind **normalverteilt**, $X \sim N(\mu;\sigma)$. Ihre Dichte ist die Gaußsche Glockenkurve $\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$. Eigenschaften: Der Graph ist symmetrisch zur Geraden $x = \mu$, der Hochpunkt liegt bei $x = \mu$ mit dem Wert $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, die Wendepunkte liegen bei $x = \mu \pm \sigma$. Ein kleineres σ macht die Kurve höher und schmaler, ein größeres flacher und breiter. Der Parameter μ verschiebt die Kurve nach links oder rechts. Für die **Standardnormalverteilung** $N(0;1)$ gilt $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$; ihre Verteilungsfunktion heißt $\Phi(z) = P(Z \le z)$.



Standardisieren und Wahrscheinlichkeiten berechnen

Definition: standardisieren

Jede normalverteilte Größe lässt sich **standardisieren**: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ist $N(0;1)$-verteilt. Damit gilt $P(X \le x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ und $P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$. Die Werte von Φ liest man in der Tabelle oder mit dem Taschenrechner (normalcdf) ab. Wegen der Symmetrie gilt $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ und $P(X \ge x) = 1 - P(X \le x)$. Beispiel: $X \sim N(100;15)$. Dann ist $P(X \le 115) = \Phi(1) \approx 0{,}8413$ und $P(X > 130) = 1 - \Phi(2) \approx 0{,}0228$.

Satz: Standardisierung

Ist $X \sim N(\mu;\sigma^2)$, so ist $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt, und es gilt

$$P(X \le x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Die σ-Regeln

Für jede Normalverteilung gilt: $P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) \approx 68{,}3\,\%$, $P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) \approx 95{,}4\,\%$, $P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) \approx 99{,}7\,\%$. Außerdem ist $P(\mu-1{,}96\sigma \le X \le \mu+1{,}96\sigma) \approx 95\,\%$ (Faktor 1,96 für das zentrale 95-%-Intervall), und $1{,}645$ beziehungsweise $2{,}576$ gehören zu $90\,\%$ und $99\,\%$. Mit diesen Werten bestimmt man Intervalle ohne Taschenrechner.

Quantile: Umkehraufgaben

Soll zu einer Wahrscheinlichkeit p die Grenze x bestimmt werden ($P(X \le x) = p$), liest man z mit $\Phi(z) = p$ ab (inverse Normalverteilung, invNorm) und berechnet $x = \mu + z\sigma$. Beispiel: Welche Körpergröße unterschreiten 90 % einer $N(175;7)$-verteilten Gruppe? $z = 1{,}2816$, $x = 175 + 1{,}2816 \cdot 7 \approx 184{,}0$ cm. Fehlt der Parameter μ oder σ, setzt man die standardisierte Gleichung an: Aus $P(X \le 60) = 0{,}9$ bei $\mu = 50$ folgt $\frac{10}{\sigma} = 1{,}2816$, also $\sigma \approx 7{,}80$.

Näherung der Binomialverteilung

Definition: Laplace-Bedingung

Ist $X \sim B(n;p)$ und gilt die **Laplace-Bedingung** $\sigma = \sqrt{np(1-p)} > 3$, kann man die Binomialverteilung durch die Normalverteilung mit $\mu = np$ und σ annähern. Wegen der Diskretisierung verwendet man die **Stetigkeitskorrektur**: $P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$. Beispiel: $X \sim B(100;0{,}5)$, $\mu = 50$, $\sigma = 5$. Dann ist $P(45 \le X \le 55) \approx \Phi(1{,}1) - \Phi(-1{,}1) = 2\Phi(1{,}1) - 1 \approx 0{,}7287$.

Beispiel 1: Abfüllanlage

Eine Anlage füllt Flaschen, deren Inhalt $N(500;2)$-verteilt ist (in ml). Gesucht ist der Anteil der Flaschen, die weniger als 495 ml enthalten. Zuerst standardisieren wir: $z = \frac{495-500}{2} = -2{,}5$. Dann gilt $P(X$. Etwa $0{,}6\,\%$ der Flaschen sind also zu leer. Soll der Anteil unter $0{,}1\,\%$ sinken, muss man den Mittelwert erhöhen oder die Streuung verkleinern: Aus $\Phi(z) = 0{,}001$ folgt $z \approx -3{,}09$, und mit $\sigma = 2$ braucht man $\mu \ge 495 + 3{,}09 \cdot 2 = 501{,}18$ ml. Solche Aufgaben mit „Einstellung der Maschine“ sind im Abitur häufig und führen immer auf die Standardisierung und das Quantil z.

Vorgehen bei Aufgaben zur Normalverteilung

So gehst du vor

1. Zufallsgröße beschreiben und Parameter angeben: $X \sim N(\mu;\sigma)$.
2. Skizze der Glockenkurve mit schraffierter Fläche anfertigen.
3. Grenzen standardisieren oder direkt mit normalcdf rechnen; bei Intervallen $\Phi(z_2) - \Phi(z_1)$.
4. Bei Umkehraufgaben zuerst z aus der Tabelle bestimmen, dann $x = \mu + z\sigma$ berechnen.
5. Antwortsatz in der Sprache der Aufgabe (zum Beispiel „Etwa 0,6 % der Flaschen enthalten weniger als 495 ml“).

Zusammenhang mit der Integralrechnung

Die Verteilungsfunktion $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t)\,dt$ ist eine Integralfunktion der Dichte. Weil für $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ keine Stammfunktion aus elementaren Funktionen existiert, werden die Werte von Φ tabelliert oder vom Taschenrechner numerisch bestimmt. Die Ableitung von Φ ist φ; damit ist Φ streng monoton wachsend mit $\Phi(-\infty) = 0$ und $\Phi(\infty) = 1$.

Merke

n Sie sich außerdem die Faustwerte $\Phi(1) \approx 0{,}8413$, $\Phi(2) \approx 0{,}9772$, $\Phi(3) \approx 0{,}9987$ und $\Phi(1{,}645) \approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$. Mit ihnen lassen sich viele Aufgaben auch ohne

Taschenrechner abschätzen.

Weitere Beispiele

Beispiel 2: Wahrscheinlichkeit

$X \sim N(100;15^2)$. **Bestimmen Sie** $P(X \leq 115)$.

$P(X \leq 115) = \Phi\left(\frac{115-100}{15}\right) = \Phi(1) \approx 0{,}8413.$

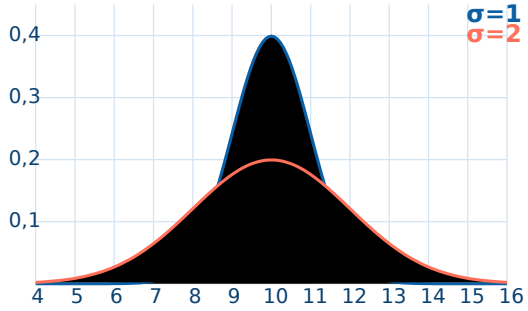
Beispiel 3: Intervall

$X \sim N(50;4)$ **(also** $\sigma = 2$**). Bestimmen Sie** $P(48 \leq X \leq 54)$.

$P = \Phi(2) - \Phi(-1) \approx 0{,}9772 - 0{,}1587 = 0{,}8185.$

Die Bedeutung der Parameter μ und σ

Der Erwartungswert μ legt fest, wo die Glockenkurve ihren Gipfel hat; ändert man μ, wird die Kurve nur nach links oder rechts verschoben. Die Standardabweichung σ bestimmt die Breite: Bei großem σ ist die Kurve flach und breit, bei kleinem σ schmal und hoch. Da die Gesamtfläche immer 1 beträgt, ist der Hochpunkt $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ umso niedriger, je größer σ ist. In der Abbildung ist die Fläche zwischen 9 und 11 unter der schmalen Kurve markiert; sie beträgt etwa $0{,}683$.



Beispiel 4: Quantil bestimmen

Die Masse der Brezeln ist $N(80;3)$-verteilt (in g). Unterhalb welcher Masse liegen die leichtesten $5\,\%$?

Gesucht ist c mit $P(X \leq c) = 0{,}05$. Aus $\Phi(z) = 0{,}05$ folgt $z \approx -1{,}645$ (wegen $\Phi(1{,}645) \approx 0{,}95$ und der Symmetrie). Also $c = \mu + z\sigma = 80 - 1{,}645 \cdot 3 \approx 75{,}06$ g. Die leichtesten $5\,\%$ der Brezeln wiegen weniger als etwa $75{,}1$ g.

Den Erwartungswert passend einstellen

In der Industrie ist die Streuung σ einer Maschine meist fest vorgegeben, den Sollwert μ

kann man dagegen einstellen. Nach der deutschen Fertigpackungsverordnung dürfen Packungen die angegebene Nennfüllmenge im Mittel nicht unterschreiten, und nur wenige dürfen deutlich darunter liegen. Ein Hersteller stellt die Maschine deshalb etwas höher ein, als auf der Packung steht – aber nicht zu hoch, denn jedes Gramm zu viel kostet Geld.

Beispiel 5: Abfüllmenge einstellen

Eine Anlage füllt Mehlpackungen mit $\sigma = 6$ g ab. Auf welchen Wert μ muss sie eingestellt werden, damit höchstens $2\,\%$ der Packungen weniger als $1\,000$ g enthalten?

Bedingung: $P(X$. Aus $\Phi(z) = 0{,}02$ folgt $z \approx -2{,}054$. Also $\frac{1000-\mu}{6} \leq -2{,}054$, d. h. $\mu \geq 1000 + 2{,}054 \cdot 6 \approx 1012{,}3$ g. Die Anlage wird auf etwa $1\,012{,}4$ g eingestellt.

Stetige Zufallsgrößen mit anderen Dichten

Nicht jede stetige Zufallsgröße ist normalverteilt. Jede Funktion f mit $f(x) \geq 0$ und $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ über dem Definitionsbereich kann als Dichtefunktion dienen. Wahrscheinlichkeiten berechnet man dann mit Stammfunktionen, den Erwartungswert mit $E(X) = \int x\, f(x)\,\mathrm{d}x$. Bei der Normalverteilung gibt es keine elementare Stammfunktion; deshalb benutzt man Tabellen von Φ oder den Taschenrechner (normalcdf).

Beispiel 6: Eine Dreiecksdichte

Die Wartezeit X (in Minuten) an einer Supermarktkasse habe die Dichte $f(x) = \frac{2}{25}(5 - x)$ für $0 \leq x \leq 5$. Prüfen Sie, dass f eine Dichte ist, und berechnen Sie $P(X \leq 1)$.

$f(x) \geq 0$ auf $[0;5]$ und $\int_0^5 \frac{2}{25}(5-x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{25}\left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \frac{2}{25} \cdot 12{,}5 = 1$. Damit ist $P(X \leq 1) = \frac{2}{25}\left(5 - \frac{1}{2}\right) = 0{,}36$. Mit $36\,\%$ Wahrscheinlichkeit wartet man höchstens eine Minute.

Wann ist die Normalverteilung ein gutes Modell?

Die Normalverteilung passt besonders gut, wenn eine Größe durch viele kleine, voneinander unabhängige Einflüsse entsteht, die sich addieren: Bei der Brezel sind das Teigmenge, Feuchtigkeit, Backzeit und Handgriff des Bäckers. Dieser Zusammenhang heißt zentraler Grenzwertsatz und erklärt, warum die Glockenkurve so häufig vorkommt. Vorsicht ist geboten bei Größen, die nicht negativ werden können und stark streuen, etwa Wartezeiten oder Einkommen. Diese Verteilungen sind meist schief. Prüfen Sie deshalb im Sachzusammenhang, ob das Modell plausibel ist: Liegt der Bereich $[\mu - 3\sigma;\, \mu + 3\sigma]$ vollständig im sinnvollen Wertebereich, und ist das Histogramm der Daten ungefähr symmetrisch?

Beispiel 7: Schnelle Abschätzung mit den Sigma-Regeln

Die Fahrzeit eines Regionalzugs von Kassel nach Göttingen ist $N(38;2)$-

verteilt (in Minuten). Schätzen Sie ohne Taschenrechner, wie oft der Zug länger als 42 Minuten braucht.

$42 = \mu + 2\sigma$. Im 2σ-Intervall liegen etwa $95{,}4\,\%$ der Fahrzeiten, außerhalb also $4{,}6\,\%$. Wegen der Symmetrie liegt die Hälfte davon oberhalb: etwa $2{,}3\,\%$. Bei 30 Fahrten im Monat ist das etwa einmal pro Monat.

Wusstest du? Gauß auf dem Zehnmarkschein

Carl Friedrich Gauß nutzte die Glockenkurve um 1809, um aus fehlerbehafteten Messungen die Bahn des Zwergplaneten Ceres zu berechnen. Von 1991 bis zur Einführung des Euro zeigte der deutsche Zehnmarkschein sein Porträt zusammen mit der Formel und dem Graphen der Normalverteilung. Deshalb heißt die Glockenkurve bis heute auch Gaußsche Glockenkurve.

Normalverteilung und Binomialverteilung im Vergleich

Die Binomialverteilung zählt Treffer und nimmt nur ganze Zahlen an; die Normalverteilung beschreibt Messgrößen, die jeden Wert eines Intervalls annehmen können. Bei großen Stichproben sieht das Histogramm einer Binomialverteilung trotzdem fast wie eine Glockenkurve aus. Deshalb darf man es durch eine Normalverteilung mit gleichem Erwartungswert und gleicher Standardabweichung ersetzen, sobald $\sigma > 3$ gilt. Weil ein Balken bei k von $k - 0{,}5$ bis $k + 0{,}5$ reicht, verschiebt man die Grenzen jeweils um eine halbe Einheit nach außen. Diese Stetigkeitskorrektur verbessert die Näherung deutlich, besonders bei kleineren Stichproben.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Stetige Zufallsgröße: Wahrscheinlichkeiten sind Flächen unter der Dichtefunktion f mit $f(x) \geq 0$ und Gesamtfläche 1; deshalb gilt $P(X = a) = 0$ und $P(X$.
- Normalverteilung $N(\mu;\sigma)$: Glockenkurve $\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, symmetrisch zu $x = \mu$, Hochpunkt bei μ, Wendestellen bei $\mu \pm \sigma$.
- Standardisieren: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0;1)$, $P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, $P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.
- Symmetrie: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$; $P(|X - \mu| \leq c) = 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1$.
- σ-Regeln: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}683$, 2σ: $0{,}954$, 3σ: $0{,}997$; $1{,}96\sigma$: $0{,}95$; $2{,}58\sigma$: $0{,}99$.
- Umkehraufgaben (Quantile): Aus $\Phi(z) = q$ folgt z, dann $x = \mu + z\sigma$; ist μ oder σ gesucht, löst man $\frac{x-\mu}{\sigma} = z$ nach der Unbekannten auf.
- Näherung der Binomialverteilung (Laplace-Bedingung $\sigma > 3$): $P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$ mit $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.
- Erwartungswert einer stetigen Zufallsgröße: $E(X) = \int x\, f(x)\, \mathrm{d}x$; bei der Normalverteilung ist $E(X) = \mu$.

Achtung: Typische Fehler

- Die Standardisierung falsch durchführen (Division durch σ^2 statt σ, oder μ vergessen).
- Bei $P(X \geq x)$ das Gegenereignis $1 - \Phi$ nicht bilden.
- Die Stetigkeitskorrektur bei der Näherung vergessen oder mit falschem Vorzeichen anwenden.
- Die Laplace-Bedingung nicht prüfen.
- Bei negativen z-Werten Tabelle falsch benutzen; die Symmetrie $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ kennen.

Ottos Tipp: Skizziere immer eine Glockenkurve und schraffiere die gesuchte Fläche. Dann siehst du sofort, ob du Φ oder $1 - \Phi$ brauchst!

Ottos Tipp

Eine kleine Skizze der Glockenkurve mit schraffierter Fläche verhindert die meisten Fehler bei „größer als“, „kleiner als“ und „zwischen“. Nutzen Sie die Symmetrie: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.