Arbeitsblatt - Normalverteilung

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Die Glockenkurve beschreiben

Die Zufallsgröße X ist $N(50;5)$-verteilt.

a) Geben Sie die Dichtefunktion φ an.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunkts.
c) Geben Sie die Wendestellen an.
d) Begründen Sie ohne Rechnung: $P(X \leq 50) = 0{,}5$ und $P(X \leq 45) = P(X \geq 55)$.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Standardisieren

Die Zufallsgröße X ist $N(100;15)$-verteilt. Berechnen Sie mit Standardisierung.

a) $P(X \leq 115)$
b) $P(X \geq 130)$
c) $P(85 \leq X \leq 115)$
d) $P(X = 100)$ und $P(X$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Mit der Standardnormalverteilung rechnen

Es sei $Z \sim N(0;1)$. Verwenden Sie $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ und geben Sie vier Nachkommastellen an.

a) $P(Z \leq 1{,}5)$ und $P(Z \leq -1{,}5)$
b) $P(-0{,}5 \leq Z \leq 2)$
c) $P(|Z| > 2{,}5)$
d) Bestimmen Sie z mit $P(-z \leq Z \leq z) = 0{,}9$.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Die Sigma-Regeln anwenden

Die Körpergröße X (in cm) der Schüler eines Jahrgangs sei $N(178;7)$-verteilt.

a) Geben Sie das Intervall an, in dem etwa $68{,}3\,\%$ der Körpergrößen liegen.
b) Geben Sie das 2σ- und das 3σ-Intervall mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.
c) Wie groß ist der Anteil der Schüler, die größer als 192 cm sind?
d) In welchem symmetrischen Intervall um μ liegen $95\,\%$ der Körpergrößen?

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Quantile bestimmen

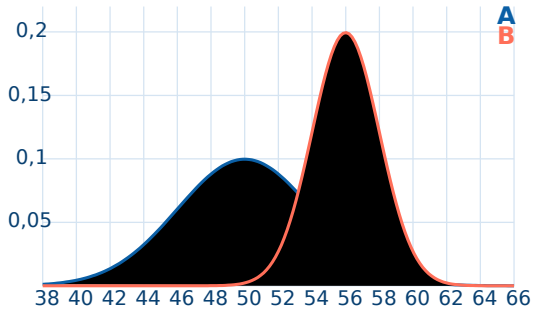
Lösen Sie die Umkehraufgaben mit Φ^{-1} (Taschenrechner: invNorm).

a) Bestimmen Sie z mit $\Phi(z) = 0{,}9$, $0{,}95$ und $0{,}975$.
b) $X \sim N(60;4)$: Bestimmen Sie c mit $P(X \le c) = 0{,}9$.
c) $X \sim N(60;4)$: Bestimmen Sie d mit $P(X \ge d) = 0{,}99$.
d) Erklären Sie, warum d kleiner als 60 ist.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Zwei Glockenkurven vergleichen

Die Abbildung zeigt die Dichtefunktionen zweier normalverteilter Zufallsgrößen A und B.



a) Lesen Sie die Erwartungswerte ab.
b) Welche Zufallsgröße hat die größere Standardabweichung? Begründen Sie mit der Höhe der Kurven.
c) Die Hochpunkte liegen bei etwa $0{,}0997$ und $0{,}1995$. Bestimmen Sie daraus σ_A und σ_B.
d) Für welche Zufallsgröße ist $P(X \ge 58)$ größer? Schätzen Sie zuerst, rechnen Sie dann.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Brötchen aus dem Backautomaten

Ein Backautomat in einer Filialbäckerei in Köln formt Brötchen, deren Masse X (in g) als $N(60;2{,}5)$-verteilt angenommen wird.

a) Berechnen Sie den Anteil der Brötchen, die weniger als 56 g wiegen.
b) Berechnen Sie den Anteil der Brötchen zwischen 58 g und 62 g.
c) Brötchen über 65 g werden aussortiert und als „Großbrötchen“ verkauft. Wie viele sind das bei $3\,000$ Brötchen?
d) Welche Masse wird von $90\,\%$ der Brötchen überschritten?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Körpergröße und Kleidergrößen

Ein Modeunternehmen plant eine neue Hosenkollektion für Frauen. Die Körpergröße erwachsener Frauen in Deutschland wird als $N(166;6{,}5)$-verteilt angenommen (in cm).

a) Welcher Anteil der Frauen ist größer als 180 cm?
b) Welcher Anteil ist zwischen 160 cm und 170 cm groß?
c) Die Kollektion „Lang“ soll die größten $10\,\%$ ansprechen. Ab welcher Körpergröße ist das der Fall?
d) Wie viele von 500 zufällig ausgewählten Kundinnen sind kleiner als 155 cm?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Apfelsaft in Literflaschen

Eine Kelterei im Alten Land füllt Apfelsaft in Flaschen mit der Aufschrift „1 l“. Die Füllmenge X (in ml) ist $N(1\,003;4)$-verteilt.

a) Berechnen Sie den Anteil der Flaschen mit weniger als $1\,000$ ml.
b) Berechnen Sie den Anteil der Flaschen, die um mehr als 8 ml vom Sollwert $1\,003$ ml abweichen.
c) Auf welchen Wert μ muss die Anlage eingestellt werden, damit höchstens $2\,\%$ der Flaschen weniger als $1\,000$ ml enthalten?
d) Die Kelterei füllt pro Jahr 2 Millionen Flaschen ab. Wie viel Saft (in Litern) kostet die neue Einstellung zusätzlich im Vergleich zu $\mu = 1\,003$ ml?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Mit dem Bus zur Schule

Paul fährt jeden Morgen mit dem Bus zum Gymnasium. Die Fahrzeit von der Haustür bis ins Klassenzimmer ist $N(25;4)$-verteilt (in Minuten). Der Unterricht beginnt um $7{:}55$ Uhr.

a) Paul geht um $7{:}25$ Uhr los. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt er zu spät?
b) Wann muss er spätestens losgehen, damit er mit $95\,\%$ Wahrscheinlichkeit pünktlich ist?
c) An wie vielen der 190 Schultage kommt er bei Abfahrt um $7{:}25$ Uhr voraussichtlich zu spät?
d) Bei Glatteis gilt $N(32;6)$. Wie groß ist dann bei Abfahrt um $7{:}15$ Uhr die Verspätungswahrscheinlichkeit?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Der Lauf beim Sportfest

Beim Sportfest eines Gymnasiums laufen die Schülerinnen der Q1 die $3\,000$ m. Die Laufzeiten sind näherungsweise $N(16;1{,}8)$-verteilt (in Minuten).

a) Welcher Anteil braucht weniger als 14 Minuten?
b) Die Note „sehr gut“ erhalten die schnellsten $10\,\%$. Welche Zeit muss man dafür unterbieten?
c) Wie viele der 120 Läuferinnen brauchen voraussichtlich zwischen 15 und 18 Minuten?
d) Begründen Sie, warum eine Normalverteilung für Laufzeiten nur ein Näherungsmodell ist.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Eier nach Gewichtsklassen

Ein Geflügelhof in Niedersachsen sortiert Eier nach den Gewichtsklassen der EU. Die Eimasse X ist $N(62;5)$-verteilt (in g).

Klasse	S	M	L	XL
Masse	unter 53 g	53 bis unter 63 g	63 bis unter 73 g	ab 73 g
Anteil	?	?	?	?

a) Berechnen Sie die Anteile der vier Klassen und ergänzen Sie die Tabelle.
b) Kontrollieren Sie, dass die Summe 1 ergibt.
c) Ein Zehnerkarton „M“ wird nur aus Eiern der Klasse M gepackt. Wie viele Kartons füllt eine Tagesproduktion von $12\,000$ Eiern?
d) Wie müsste μ bei gleichem σ liegen, damit genau die Hälfte der Eier mindestens Klasse L hat?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Münzwurf und Glockenkurve

Eine Münze wird 400-mal geworfen. X zählt die Würfe mit „Kopf“.

a) Berechnen Sie μ und σ und prüfen Sie die Laplace-Bedingung.
b) Berechnen Sie $P(190 \le X \le 215)$ näherungsweise mit der Normalverteilung (mit Stetigkeitskorrektur).
c) Vergleichen Sie mit dem exakten Wert der Binomialverteilung.
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht X um höchstens 20 von 200 ab?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Die Umfrage vor der Bürgermeisterwahl

In einer Großstadt unterstützen $35\,\%$ der Wahlberechtigten die Kandidatin Frau Yilmaz. Ein Institut befragt $1\,000$ zufällig ausgewählte Wahlberechtigte.

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der Anzahl X ihrer Unterstützer.
b) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 370 Befragte sie unterstützen.
c) In welchem symmetrischen Intervall um μ liegt X mit etwa $95\,\%$ Wahrscheinlichkeit?
d) Die Zeitung meldet: „$38\,\%$ für Yilmaz“. Ist das mit $p = 0{,}35$ gut verträglich?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Toleranzen bei Präzisionsschrauben

Ein Betrieb in Schwaben stellt Schrauben her, deren Länge X (in mm) $N(40;\,0{,}2)$-verteilt ist. Eine Schraube ist brauchbar, wenn ihre Länge zwischen $39{,}6$ mm und $40{,}4$ mm liegt. Unbrauchbare Schrauben verursachen Kosten von *0{,}05\,€* pro Stück. Täglich werden $50\,000$ Schrauben gefertigt.

Größe	Wert
Sollwert μ	40 mm
Standardabweichung σ	$0{,}2$ mm
Toleranz	$\pm 0{,}4$ mm
Tagesproduktion	$50\,000$ Stück

a) Berechnen Sie den Ausschussanteil.
b) Berechnen Sie die täglichen Ausschusskosten.
c) Durch Verschleiß verschiebt sich μ auf $40{,}1$ mm. Wie groß ist der Ausschussanteil jetzt?
d) Eine neue Maschine soll nur noch $1\,\%$ Ausschuss liefern (bei $\mu = 40$). Welche Standardabweichung darf sie höchstens haben?
e) Die neue Maschine kostet *18\,000\,€* mehr. Nach wie vielen Arbeitstagen hat sie sich durch gesparte Ausschusskosten bezahlt gemacht?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Wie hoch muss die Tür sein?

Ein Architekt plant ein Studentenwohnheim in Aachen. Die Körpergröße der Männer zwischen 18 und 30 Jahren wird als $N(180;\,7)$-verteilt angenommen (in cm). Zusätzlich rechnet er mit 3 cm für Schuhe und 2 cm Sicherheitsabstand zum Türrahmen.

Türhöhe (lichte Höhe)	Typischer Einsatz
$1{,}985$ m	Standardtür im Wohnungsbau
$2{,}11$ m	erhöhte Tür
$2{,}26$ m	Sonderanfertigung

a) Welcher Anteil der Männer ist größer als $1{,}93$ m, passt also mit Schuhen und Abstand nicht unter eine Standardtür?
b) Wie hoch müsste die lichte Türhöhe sein, damit $99{,}9\,\%$ der Männer bequem hindurchgehen?
c) Reicht die erhöhte Tür von $2{,}11$ m dafür aus?
d) Im Wohnheim wohnen 300 Männer. Wie viele müssen an der Standardtür voraussichtlich den Kopf einziehen?
e) Begründen Sie, warum man für solche Planungen nicht mit dem 3σ-Intervall, sondern mit einer einseitigen Grenze rechnet.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Eine stetige Dichte untersuchen

Die Zeit X (in Stunden), die ein Paketbote für eine Tour benötigt, habe die Dichte $f(x) = \frac{3}{4}x(2-x)$ für $0 \le x \le 2$ (gezählt in Stunden über der Mindestzeit von 3 Stunden), sonst $f(x) = 0$.

a) Zeigen Sie, dass f eine Dichtefunktion ist.
b) Berechnen Sie $P(X \le 0{,}5)$ und $P(0{,}5 \le X \le 1{,}5)$.
c) Begründen Sie mit der Symmetrie, dass $E(X) = 1$ gilt, und bestätigen Sie es durch Integration.
d) Berechnen Sie die Varianz $V(X) = \int_0^2 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - E(X)^2$ und σ.
e) Wie lange dauert die Tour insgesamt im Mittel?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Die Pizza-Garantie

Ein Lieferdienst in Leipzig verspricht: „Ist Ihre Pizza nicht nach 45 Minuten da, ist sie gratis.“ Die Lieferzeit ist $N(30;\,6)$-verteilt (in Minuten). Eine Pizza kostet im Mittel *11*\,€, die Herstellungskosten betragen *4*\,€.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Pizza gratis?
b) Mit wie vielen Gratispizzen ist bei $1\,000$ Bestellungen zu rechnen, und welcher Umsatz geht dadurch verloren?
c) Die Geschäftsführung will höchstens $1\,\%$ Gratispizzen. Welche Lieferzeit darf sie dann versprechen?
d) Durch einen zusätzlichen Fahrer sinkt die mittlere Lieferzeit auf 26 Minuten bei gleicher Streuung. Wie viele Gratispizzen gibt es dann bei der 45-Minuten-Garantie pro $1\,000$ Bestellungen?
e) Der Fahrer kostet *120*\,€ pro Abend, an dem etwa 250 Pizzen geliefert werden. Lohnt er sich allein wegen der Garantie? Begründen Sie.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Überbuchtes Konzert

Für ein Open-Air-Konzert in Hamburg mit $2\,000$ Plätzen werden $2\,100$ Karten im Vorverkauf verkauft, weil erfahrungsgemäß nur $94\,\%$ der Karteninhaber tatsächlich kommen. X sei die Zahl der Besucher.

a) Berechnen Sie μ und σ und begründen Sie, dass die Normalverteilung als Näherung verwendet werden darf.
b) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass der Platz nicht reicht.
c) Vergleichen Sie mit dem exakten Wert der Binomialverteilung.
d) Wie viele Karten dürfte man höchstens verkaufen, damit der Platz mit $99\,\%$ Wahrscheinlichkeit reicht? Probieren Sie mit dem Taschenrechner.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Die Tangente im Wendepunkt (Knobelaufgabe)

Gegeben ist die Dichtefunktion $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ mit $\sigma > 0$.

a) Zeigen Sie: $\varphi'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}\,\varphi(x)$.

b) Zeigen Sie: $\varphi''(x) = \frac{(x-\mu)^2-\sigma^2}{\sigma^4}\,\varphi(x)$, und folgern Sie die Wendestellen.

c) Zeigen Sie: Die Tangente im Wendepunkt $W(\mu+\sigma|\varphi(\mu+\sigma))$ schneidet die x-Achse bei $x = \mu + 2\sigma$.

d) Deuten Sie das Ergebnis für das Zeichnen von Glockenkurven per Hand.