Lösungen - Normalverteilung

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Die Dichtefunktion erhält man durch Einsetzen von $\mu = 50$ und $\sigma = 5$ in die allgemeine Formel. Hochpunkt und Wendestellen müssen nicht neu berechnet werden: Sie liegen bei jeder Normalverteilung bei μ bzw. bei $\mu \pm \sigma$. Die Symmetrie der Glockenkurve beantwortet die Frage in d).

a) $\varphi(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-50}{5}\right)^2}$.

b) Hochpunkt bei $x = \mu = 50$ mit $\varphi(50) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}0798$: $H(50|0{,}0798)$.
c) Wendestellen bei $\mu \pm \sigma$: $x = 45$ und $x = 55$.
d) Die Kurve ist symmetrisch zu $x = 50$, die Gesamtfläche ist 1: links von 50 liegt die Hälfte. Die Flächen links von 45 und rechts von 55 sind Spiegelbilder.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Jeder Wert von X wird mit $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ standardisiert; danach liest man $\Phi(z)$ ab. Für Wahrscheinlichkeiten „größer als“ verwendet man das Gegenereignis, für Intervalle die Differenz zweier Φ-Werte. Bei einer stetigen Zufallsgröße hat jeder einzelne Wert die Wahrscheinlichkeit null.

a) $z = \frac{115-100}{15} = 1$: $P(X \leq 115) = \Phi(1) \approx 0{,}8413$.
b) $z = 2$: $P(X \geq 130) = 1 - \Phi(2) \approx 0{,}0228$.
c) $\Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0{,}6827$.
d) $P(X = 100) = 0$ (stetige Zufallsgröße); $z = -2$: $P(X$.

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg: Negative z-Werte stehen meist nicht in der Tabelle; man nutzt die Symmetrie $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$. Ein Betrag $|Z| > c$ bedeutet zwei Randbereiche gleicher Größe. In d) wird umgekehrt aus einer Wahrscheinlichkeit der zugehörige z-Wert bestimmt.

a) $\Phi(1{,}5) \approx 0{,}9332$; $\Phi(-1{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5) \approx 0{,}0668$.
b) $\Phi(2) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(2) - 1 + \Phi(0{,}5) \approx 0{,}9772 - 1 + 0{,}6915 = 0{,}6687$.
c) $P(|Z| > 2{,}5) = 2(1 - \Phi(2{,}5)) \approx 0{,}0124$.
d) $2\Phi(z) - 1 = 0{,}9 \Rightarrow \Phi(z) = 0{,}95 \Rightarrow z \approx 1{,}645$.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Die Intervalle der Sigma-Regeln erhält man, indem man ein-, zwei- oder dreimal σ zu μ addiert und abzieht. Für Anteile oberhalb einer Grenze, die genau bei $\mu + 2\sigma$ liegt, halbiert man den Rest außerhalb des Intervalls. Für $95\,\%$ gehört der Faktor

$1{,}96$.

a) $[\mu-\sigma;\mu+\sigma]=[171;185]$ cm.
b) $[164;192]$ mit etwa $95{,}4\,\%$; $[157;199]$ mit etwa $99{,}7\,\%$.
c) $192=\mu+2\sigma$: $P(X>192)=1-\Phi(2)\approx 0{,}0228$, also etwa $2{,}3\,\%$.
d) $\mu\pm 1{,}96\sigma=178\pm 13{,}72$: $[164{,}28;191{,}72]$ cm.

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Bei Umkehraufgaben ist die Wahrscheinlichkeit gegeben und die Grenze gesucht. Man bestimmt mit invNorm den passenden z-Wert und rechnet mit $x=\mu+z\sigma$ zurück. Bei „mindestens“-Bedingungen formt man zuerst auf $P(X$ um.

a) $z_{0{,}9}\approx 1{,}282$, $z_{0{,}95}\approx 1{,}645$, $z_{0{,}975}\approx 1{,}960$.
b) $c=60+1{,}282\cdot 4\approx 65{,}13$.
c) $P(X$.
d) $99\,\%$ der Werte sollen rechts von d liegen; das geht nur, wenn d weit links vom Gipfel bei 60 liegt.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Aus der Grafik liest man die Lage der Gipfel ab, sie liefern μ. Die Höhe des Gipfels ist $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$; daraus folgt σ. Zum Schluss werden die Schätzungen mit einer Standardisierung rechnerisch überprüft.

a) $\mu_A=50$, $\mu_B=56$.
b) A: Die Kurve ist flacher und breiter. Weil die Fläche immer 1 ist, bedeutet eine niedrigere Kurve eine größere Streuung.
c) $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}=0{,}0997\Rightarrow\sigma_A\approx 4{,}00$; entsprechend $\sigma_B\approx 2{,}00$.
d) Schätzung: B, denn 58 liegt nur $1\sigma_B$ über μ_B. Rechnung:
$P(A\geq 58)=1-\Phi(2)\approx 0{,}0228$; $P(B\geq 58)=1-\Phi(1)\approx 0{,}1587$.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: Die Brötchenmasse ist normalverteilt. Für Anteile unterhalb, zwischen oder oberhalb von Grenzen wird standardisiert. Aus dem Anteil folgt durch Multiplikation mit der Gesamtzahl die erwartete Stückzahl. In d) handelt es sich um eine Umkehraufgabe mit dem $10\,\%$-Quantil.

a) $z=\frac{56-60}{2{,}5}=-1{,}6$: $\Phi(-1{,}6)\approx 0{,}0548$, also etwa $5{,}5\,\%$.
b) $z=\pm 0{,}8$: $2\Phi(0{,}8)-1\approx 0{,}5763$.
c) $z=2$: $1-\Phi(2)\approx 0{,}0228$; $3\,000\cdot 0{,}0228\approx 68$ Brötchen.
d) $P(X\geq c)=0{,}9\Rightarrow\Phi\left(\frac{c-60}{2{,}5}\right)=0{,}1\Rightarrow c\approx 60-1{,}282\cdot 2{,}5\approx 56{,}80$ g.

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: Die Körpergröße wird als $N(166;6{,}5)$-verteilt angenommen. Nach dem Standardisieren liefern Φ-Werte die gesuchten Anteile. Die Grenze für die Kollektion

„Lang“ ist ein Quantil; die erwartete Anzahl kleiner Kundinnen ergibt sich aus Anteil mal Stichprobengröße.

a) $z = \frac{14}{6{,}5} \approx 2{,}15$: $1 - \Phi(2{,}15) \approx 0{,}0156$.
b) $\Phi\left(\frac{4}{6{,}5}\right) - \Phi\left(\frac{-6}{6{,}5}\right) \approx 0{,}7308 - 0{,}1780 = 0{,}5529$.
c) $c = 166 + 1{,}282 \cdot 6{,}5 \approx 174{,}3$ cm.
d) $\Phi\left(\frac{-11}{6{,}5}\right) \approx 0{,}0453$; $500 \cdot 0{,}0453 \approx 23$ Kundinnen.

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Zuerst wird der Anteil der unterfüllten Flaschen bei der aktuellen Einstellung berechnet. Dann wird μ als Unbekannte behandelt: Aus der Bedingung $\Phi(z) \leq 0{,}02$ folgt eine lineare Ungleichung für μ. Zum Schluss werden die Mehrkosten über die Jahresproduktion hochgerechnet.

a) $z = \frac{1000 - 1003}{4} = -0{,}75$: $\Phi(-0{,}75) \approx 0{,}2266$, also gut $23\,\%$.
b) $P(|X - 1003| > 8) = 2(1 - \Phi(2)) \approx 0{,}0455$.
c) $\frac{1000 - \mu}{4} \leq -2{,}054 \Rightarrow \mu \geq 1000 + 2{,}054 \cdot 4 \approx 1008{,}2$ ml.
d) Mehr pro Flasche: $1008{,}215 - 1003 = 5{,}215$ ml; insgesamt $2\,000\,000 \cdot 5{,}215$ ml $\approx 10\,430$ l.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Die verfügbare Zeit ergibt sich aus der Differenz zwischen Abfahrt und Unterrichtsbeginn. Die Verspätungswahrscheinlichkeit ist der Anteil der Fahrzeiten oberhalb dieser Zeit. Für eine sichere Abfahrtszeit bestimmt man das $95\,\%$-Quantil der Fahrzeit und rechnet zurück.

a) Verfügbar sind 30 Minuten: $P(X > 30) = 1 - \Phi(1{,}25) \approx 0{,}1056$.
b) $c = 25 + 1{,}645 \cdot 4 \approx 31{,}6$ min, also Abfahrt spätestens etwa um $7{:}23$ Uhr.
c) $190 \cdot 0{,}1056 \approx 20$ Tage.
d) Verfügbar sind 40 Minuten: $P(X > 40) = 1 - \Phi\left(\frac{8}{6}\right) \approx 0{,}0912$.

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: Die Laufzeiten werden standardisiert, um Anteile zu berechnen. Für die Note „sehr gut“ wird das $10\,\%$-Quantil bestimmt, denn schnell heißt kleine Zeit. Die erwartete Anzahl ergibt sich aus Anteil mal Teilnehmerzahl. Am Ende wird die Modellannahme kritisch bewertet.

a) $\Phi\left(\frac{-2}{1{,}8}\right) \approx 0{,}1333$.
b) $c = 16 - 1{,}282 \cdot 1{,}8 \approx 13{,}69$ min, also etwa 13 min 42 s.
c) $\Phi\left(\frac{2}{1{,}8}\right) - \Phi\left(\frac{-1}{1{,}8}\right) \approx 0{,}5775$; $120 \cdot 0{,}5775 \approx 69$ Läuferinnen.
d) Die Normalverteilung lässt beliebig kleine (auch negative) Zeiten zu; außerdem sind Laufzeiten meist rechtsschief, weil einige Läuferinnen gehen oder abbrechen.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Für jede Gewichtsklasse wird die Wahrscheinlichkeit als Differenz zweier Φ-Werte berechnet; die Summe aller Klassen muss eins ergeben. Die Anzahl der Kartons folgt aus der erwarteten Eierzahl der Klasse M. In d) nutzt man, dass bei $x = \mu$ genau die Hälfte darüber liegt.

a) S: $\Phi(-1{,}8) \approx 0{,}0359$; M: $\Phi(0{,}2) - \Phi(-1{,}8) \approx 0{,}5433$; L: $\Phi(2{,}2) - \Phi(0{,}2) \approx 0{,}4068$; XL: $1 - \Phi(2{,}2) \approx 0{,}0139$.
b) $0{,}0359 + 0{,}5433 + 0{,}4068 + 0{,}0139 = 1{,}0000$.
c) $12\,000 \cdot 0{,}5433 \approx 6520$ Eier, also 651 volle Kartons.
d) $P(X \geq 63) = 0{,}5$ gilt genau dann, wenn $\mu = 63$ g.

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Weil $\sigma > 3$ ist, darf die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung angenähert werden. Bei der Näherung werden die Grenzen mit der Stetigkeitskorrektur um $0{,}5$ erweitert. Der Vergleich mit dem exakten Wert zeigt, wie gut die Näherung ist.

a) $\mu = 200$, $\sigma = \sqrt{400 \cdot 0{,}25} = 10 > 3$: Die Näherung ist zulässig.
b) $\Phi\left(\frac{215{,}5-200}{10}\right) - \Phi\left(\frac{189{,}5-200}{10}\right) = \Phi(1{,}55) - \Phi(-1{,}05) \approx 0{,}7926$.
c) Exakt: $P(X \leq 215) - P(X \leq 189) \approx 0{,}7926$. Die Näherung weicht nur in der vierten Nachkommastelle ab.
d) $P(180 \leq X \leq 220) \approx 2\Phi(2{,}05) - 1 \approx 0{,}9596$.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Die Anzahl der Unterstützer ist binomialverteilt; wegen der großen Stichprobe wird mit der Normalverteilung gerechnet. Das $95\,\%$-Intervall um μ zeigt, welche Ergebnisse bei $p = 0{,}35$ zu erwarten sind. Ein Ergebnis außerhalb spricht gegen die Annahme.

a) $\mu = 350$, $\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65} \approx 15{,}08$.
b) $P(X \geq 370) \approx 1 - \Phi\left(\frac{369{,}5-350}{15{,}08}\right) \approx 0{,}0980$.
c) $350 \pm 1{,}96 \cdot 15{,}08 \approx 350 \pm 29{,}6$: etwa $321 \leq X \leq 379$.
d) $38\,\%$ entspricht $X = 380$ und liegt knapp außerhalb des $95\,\%$-Intervalls. Das Ergebnis ist eher ungewöhnlich; vielleicht ist die Zustimmung inzwischen gestiegen.

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Die Toleranzgrenzen liegen symmetrisch um den Sollwert; der Anteil brauchbarer Schrauben ergibt sich mit den Sigma-Regeln. Verschiebt sich μ, wird die Rechnung unsymmetrisch. Für die neue Maschine löst man nach σ auf und vergleicht anschließend Kosten und Ersparnis.

a) $P(39{,}6 \leq X \leq 40{,}4) = 2\Phi(2) - 1 \approx 0{,}9545$; Ausschuss $\approx 0{,}0455$.
b) $50\,000 \cdot 0{,}0455 \approx 2275$ Schrauben, Kosten \approx 113{,}75\,€.
c) $P = \Phi\left(\frac{0{,}3}{0{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}5}{0{,}2}\right) = \Phi(1{,}5) - \Phi(-2{,}5) \approx 0{,}9270$; Ausschuss $\approx 0{,}0730$.

d) $2\Phi\left(\frac{0{,}4}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}99 \Rightarrow \frac{0{,}4}{\sigma} \approx 2{,}576 \Rightarrow \sigma \leq 0{,}155$ mm.
e) Neue Kosten: *50\,000\cdot0{,}01\cdot0{,}05=25\,€* pro Tag; Ersparnis *\approx88{,}75\,€* pro Tag; $18\,000 : 88{,}75 \approx 203$ Arbeitstage.

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: Von der Türhöhe zieht man Schuhe und Sicherheitsabstand ab und erhält die kritische Körpergröße. Der Anteil darüber folgt aus der Normalverteilung. Für $99{,}9\,\%$ wird das entsprechende Quantil bestimmt und wieder in eine Türhöhe umgerechnet.

a) $1{,}985$ m -5 cm $= 193{,}5$ cm: $P(X > 193{,}5) = 1 - \Phi\left(\frac{13{,}5}{7}\right) \approx 0{,}0269$, also etwa $2{,}7\,\%$.
b) Körpergröße: $180 + 3{,}090 \cdot 7 \approx 201{,}6$ cm; lichte Höhe mindestens $206{,}6$ cm.
c) Ja: $2{,}11$ m $> 2{,}07$ m.
d) $300 \cdot 0{,}0269 \approx 8$ Männer.
e) Gefährlich sind nur zu große Personen; zu kleine passen immer. Deshalb zählt nur der obere Rand, und das gesamte zulässige Risiko wird auf diese eine Seite gelegt.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: Eine Dichtefunktion muss nichtnegativ sein und die Gesamtfläche eins haben. Wahrscheinlichkeiten sind Integrale der Dichte, die man mit einer Stammfunktion berechnet. Erwartungswert und Varianz werden ebenfalls über Integrale bestimmt, wobei die Symmetrie die Rechnung kontrolliert.

a) $f(x) \geq 0$ auf $[0;2]$; $\int_0^2 \frac{3}{4}(2x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$.
b) $F(x) = \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)$: $P(X \leq 0{,}5) = \frac{3}{4}\left(0{,}25 - \frac{0{,}125}{3}\right) = 0{,}15625$;
$P(0{,}5 \leq X \leq 1{,}5) = 1 - 2 \cdot 0{,}15625 = 0{,}68750$.
c) Der Graph ist eine Parabel, symmetrisch zu $x = 1$, also $E(X) = 1$. Rechnung:
$\int_0^2 \frac{3}{4}(2x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{16}{3} - 4\right) = 1$.
d) $\int_0^2 \frac{3}{4}(2x^3 - x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\left(8 - \frac{32}{5}\right) = 1{,}2$; $V(X) = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$, $\sigma = \sqrt{0{,}2} \approx 0{,}447$ h.
e) $3 + 1 = 4$ Stunden.

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Die Wahrscheinlichkeit einer Gratispizza ist der Anteil der Lieferzeiten über 45 Minuten. Mit Anteil mal Bestellungen erhält man den Umsatzverlust. Die neue Garantiezeit ist ein Quantil. Zum Schluss werden die eingesparten Kosten mit den Kosten des zusätzlichen Fahrers verglichen.

a) $P(X > 45) = 1 - \Phi(2{,}5) \approx 0{,}0062$.
b) $1\,000 \cdot 0{,}0062 \approx 6$ Pizzen; Umsatzverlust etwa *66\,€*.
c) $c = 30 + 2{,}326 \cdot 6 \approx 44{,}0$ min, also etwa 44 Minuten.
d) $1 - \Phi\left(\frac{19}{6}\right) \approx 0{,}00077$, also weniger als eine Gratispizza pro $1\,000$ Bestellungen.
e) Pro Abend spart man etwa *250\cdot(0{,}0062-0{,}0008)\cdot11\,€\approx15\,€* –

viel weniger als *120\,€*. Wegen der Garantie allein lohnt er sich nicht, eher wegen zufriedener Kunden.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Die Besucherzahl ist binomialverteilt; wegen $\sigma > 3$ wird zunächst mit der Normalverteilung samt Stetigkeitskorrektur genähert und dann mit dem exakten Wert verglichen. Für die zulässige Kartenzahl probiert man mit der Binomialverteilung systematisch verschiedene n aus.

a) $\mu = 2100 \cdot 0{,}94 = 1\,974$; $\sigma = \sqrt{2100 \cdot 0{,}94 \cdot 0{,}06} \approx 10{,}88 > 3$.

b) $P(X \geq 2001) \approx 1 - \Phi\left(\frac{2000{,}5 - 1974}{10{,}88}\right) \approx 0{,}0074$.

c) Exakt: $1 - P(X \leq 2000) \approx 0{,}0061$; die Näherung ist gut.

d) Bei $n = 2\,101$ ist $P(X \leq 2000) \approx 0{,}9921 \geq 0{,}99$, bei $n = 2\,102$ ist $P(X \leq 2000) \approx 0{,}9899$. Man dürfte also höchstens $2\,101$ Karten verkaufen; die $2\,100$ verkauften Karten erfüllen die Bedingung.

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: Die Ableitungen der Dichtefunktion entstehen mit Kettenregel und Produktregel, wobei die Exponentialfunktion als Faktor erhalten bleibt. Aus $\varphi'' = 0$ folgen die Wendestellen. Die Wendetangente wird aufgestellt und mit der x-Achse geschnitten.

a) Kettenregel: Die Ableitung des Exponenten $-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$ ist $-\frac{x-\mu}{\sigma^2}$; der Vorfaktor bleibt erhalten.

b) Produktregel: $\varphi'' = -\frac{1}{\sigma^2}\varphi - \frac{x-\mu}{\sigma^2}\varphi' = \left(-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4}\right)\varphi$. Da $\varphi > 0$, ist $\varphi'' = 0 \Leftrightarrow (x-\mu)^2 = \sigma^2 \Leftrightarrow x = \mu \pm \sigma$ (mit Vorzeichenwechsel).

c) Steigung $m = \varphi'(\mu + \sigma) = -\frac{1}{\sigma}\varphi(\mu + \sigma)$. Tangente: $y = \varphi(\mu+\sigma)\left(1 - \frac{x-\mu-\sigma}{\sigma}\right)$; $y = 0 \Leftrightarrow x - \mu - \sigma = \sigma \Leftrightarrow x = \mu + 2\sigma$.

d) Markiert man $\mu \pm \sigma$ (Wendepunkte) und $\mu \pm 2\sigma$ auf der x-Achse, erhält man ein Hilfsgerüst: Die Kurve läuft an den Wendepunkten genau in Richtung der Punkte $\mu \pm 2\sigma$.