Lösungen zur Klassenarbeit - Lagebeziehungen und Schnittprobleme

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Geradengleichung wird zeilenweise in die Koordinatenform eingesetzt; die lineare Gleichung liefert r und damit den Schnittpunkt (zwei BE). Für den Winkel berechnet man Skalarprodukt von Normalen- und Richtungsvektor sowie beide Beträge und verwendet den Sinus, weil der Normalenvektor senkrecht zur Ebene steht (drei BE). Kontrolle: $S(3|1|4)$ erfüllt $3+1+4=8$. Wer den Kosinus statt des Sinus verwendet, erhält fälschlich den Ergänzungswinkel von etwa $39{,}2°$.

a) $(1+r)+1+2r=8 \Rightarrow r=2$: $S(3|1|4)$. (2 BE)
b) $\sin\varphi=\frac{|1+0+2|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{15}} \Rightarrow \varphi\approx 50{,}77°$. (3 BE)

Lösung zu Aufgabe 2 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Für die Schnittgerade setzt man $x_3=t$ und löst das System der beiden Ebenengleichungen nach x_1 und x_2; daraus entsteht die Parameterform (drei BE). Den Schnittwinkel liefern die Normalenvektoren; ihr Skalarprodukt ist null, die Ebenen stehen also senkrecht aufeinander (zwei BE). Kontrolle: Der Richtungsvektor $(1|-2|1)$ ist zu $(1|1|1)$ und $(1|0|-1)$ orthogonal, und der Punkt $(0|3|0)$ erfüllt beide Ebenengleichungen.

a) $x_3=t \Rightarrow x_1=t$, $x_2=3-2t$: $\vec{x}=(0|3|0)^T+t\cdot(1|-2|1)^T$. (3 BE)
b) $\vec{n}_1\circ\vec{n}_2=1+0-1=0$: $90°$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Zuerst zeigt man mit dem Skalarprodukt von Normalenvektor und Richtungsvektor, dass die Gerade für jedes a parallel zur Ebene ist (zwei BE). Sie liegt genau dann in der Ebene, wenn auch ihr Stützpunkt die Ebenengleichung erfüllt; das liefert eine lineare Gleichung für a (zwei BE). Kontrolle: Mit $a=2$ liegt der Stützpunkt $(0|0|2)$ wegen $0-0+4=4$ in E, ebenso jeder weitere Punkt $(r|r|2)$.

a) $\vec{n}\circ\vec{u}=1-1+0=0$. (2 BE)
b) $0-0+2a=4 \Rightarrow a=2$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Normalenvektoren sind Vielfache voneinander, die rechten Seiten aber nicht im selben Verhältnis; deshalb sind die Ebenen echt parallel (zwei BE). Eine parallele Ebene durch einen gegebenen Punkt hat denselben

Normalenvektor; ihre rechte Seite erhält man durch Einsetzen des Punktes (zwei BE). Kontrolle: Teilt man E_2 durch 2, erhält man $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$. Die gesuchte Ebene durch P ist also genau E_2.

a) $\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$, aber $2 \cdot 3 = 6 \neq 10$. (2 BE)
b) $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 5 (2 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Ist das Skalarprodukt von Normalenvektor und Richtungsvektor null, steht der Richtungsvektor senkrecht auf der Normalen und verläuft damit parallel zur Ebene. Dann ist die Gerade entweder echt parallel oder liegt ganz in der Ebene; eine Punktprobe entscheidet. Für Deutung und Fallunterscheidung gibt es je eine Bewertungseinheit.

Der Richtungsvektor steht senkrecht auf dem Normalenvektor, liegt also parallel zur Ebene: g ist parallel zu E oder liegt in E. (2 BE)