Lernzettel - Lagebeziehungen und Schnittprobleme

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Einstieg: Der Schatten der Windkraftanlage

Auf einer Anhöhe in Schleswig-Holstein soll eine Windkraftanlage mit 120 m Nabenhöhe gebaut werden. Die Anwohner eines nahen Bauernhofs befürchten den „Schattenschlag“: Bei tief stehender Sonne werfen die drehenden Rotorblätter einen flackernden Schatten auf Hof und Häuser. Im Genehmigungsverfahren muss daher berechnet werden, wohin der Schatten bei verschiedenen Sonnenständen fällt.

Mathematisch ist das ein Schnittproblem: Ein Sonnenstrahl durch die Nabe ist eine Gerade, der Boden oder eine Hauswand ist eine Ebene. Der Schatten liegt im Schnittpunkt. In diesem Kapitel untersuchen Sie systematisch, wie Geraden und Ebenen zueinander liegen, berechnen Schnittpunkte und Schnittgeraden und bestimmen die Winkel, unter denen sie sich schneiden.

Überblick

Definition: gegenseitige Lage

Nachdem Sie Geraden und Ebenen im Raum beschreiben können, untersuchen Sie jetzt ihre **gegenseitige Lage**. Im Abitur sind dies Standardaufgaben: „Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E und berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt“, „Bestimmen Sie die Schnittgerade zweier Ebenen“ oder „Berechnen Sie den Schnittwinkel“. Mit einem festen Rechenweg sind diese Aufgaben sicher lösbar. Die Ebene wird dabei in Koordinatenform $E:\ n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=d$ verwendet.

Gerade und Ebene

Gegeben sind $g:\ \vec{x}=\vec{a}+r\vec{u}$ und $E:\ \vec{n}\circ\vec{x}=d$. Setzt man $\vec{x}=\vec{a}+r\vec{u}$ in die Ebenengleichung ein, erhält man $\vec{n}\circ\vec{a}+r\,(\vec{n}\circ\vec{u})=d$, also $(\vec{n}\circ\vec{u})\,r=d-\vec{n}\circ\vec{a}$. Drei Fälle:

- $\vec{n}\circ\vec{u}\neq 0$: genau ein r, also **ein Schnittpunkt**. Man setzt r in g ein.
- $\vec{n}\circ\vec{u}=0$ und $d-\vec{n}\circ\vec{a}\neq 0$: Widerspruch, die Gerade ist **echt parallel** zur Ebene (kein gemeinsamer Punkt).
- $\vec{n}\circ\vec{u}=0$ und $d-\vec{n}\circ\vec{a}=0$: wahre Aussage für alle r, die Gerade **liegt in der Ebene**.

Beispiel

, $E:\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7$. Einsetzen:

$2(1+r) - 2r + (1+r) = 7 \Rightarrow 3 + r = 7 \Rightarrow r = 4$. Schnittpunkt $S(5|8|5)$. Probe: $10 - 8 + 5 = 7$ ✓.

Satz: Lage von Gerade und Ebene

Setzt man $g: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$ in $E: \vec{n} \cdot \vec{x} = d$ ein, so entsteht eine lineare Gleichung in t: Hat sie genau eine Lösung, schneiden sich g und E; keine Lösung bedeutet parallel, jedes t bedeutet $g \subset E$.

So gehst du vor: Gerade und Ebene schneiden

1. Parameterform der Geraden in die Koordinatenform der Ebene einsetzen.
2. Die entstehende Gleichung nach t lösen.
3. t in die Geradengleichung einsetzen; das ergibt den Schnittpunkt.
4. Bei $0 = 0$ liegt die Gerade in der Ebene, bei $0 = c \neq 0$ ist sie parallel.

Zwei Ebenen

Definition: parallel

Für $E_1:\ \vec{n}_1 \circ \vec{x} = d_1$ und $E_2:\ \vec{n}_2 \circ \vec{x} = d_2$ prüft man zuerst, ob die Normalenvektoren Vielfache voneinander sind. Falls ja: Die Ebenen sind **parallel**; sie sind identisch, wenn auch die rechten Seiten im gleichen Verhältnis stehen ($d_2 = k\,d_1$), sonst echt parallel. Falls nein, schneiden sie sich in einer **Schnittgeraden** mit dem Richtungsvektor $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Einen Punkt der Schnittgeraden findet man, indem man eine Koordinate (zum Beispiel $x_3 = 0$) wählt und das Gleichungssystem aus beiden Ebenengleichungen löst.

Beispiel

$E_1:\ x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $E_2:\ x_1 - x_2 = 0$. Normalenvektoren $(1|1|1)^T$ und $(1|-1|0)^T$

sind keine Vielfachen. Richtung . Punkt:

$x_3 = 0$ gibt $x_1 + x_2 = 6$ und $x_1 = x_2$, also $(3|3|0)$. Schnittgerade $\vec{x} = (3|3|0)^T + t(1|1|-2)^T$.

Satz: Lage zweier Ebenen

Zwei Ebenen sind genau dann parallel oder identisch, wenn ihre Normalenvektoren kollinear sind. Andernfalls schneiden sie sich in einer Geraden, deren Richtungsvektor

$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ ist.

Schnittwinkel

Der Winkel zwischen zwei Geraden g und h mit Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ ist $\varphi = \cos^{-1} \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$. Zwischen zwei Ebenen: $\varphi = \cos^{-1} \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$. Zwischen Gerade und Ebene: $\varphi = \sin^{-1} \frac{|\vec{n} \circ \vec{u}|}{|\vec{n}|\,|\vec{u}|}$, denn der Winkel zur Ebene ist das Komplement zum Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{n}$. Der Betrag im Zähler sorgt dafür, dass ein Winkel zwischen 0° und 90° herauskommt. Beispiel: Die Ebenen $x_1 + x_3 = 4$ und $-x_1 + x_3 = 4$ haben $\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = -1 + 1 = 0$, also stehen sie senkrecht aufeinander (90°).

Definition: Rechenbeispiel zum Winkel

Rechenbeispiel zum Winkel. Für $g:\ \vec{x} = (1|0|1)^T + r(1|2|1)^T$ und $E:\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7$ ist $\vec{n} \circ \vec{u} = 2 - 2 + 1 = 1$, $|\vec{n}| = \sqrt{6}$ und $|\vec{u}| = \sqrt{6}$. Daher $\sin\varphi = \frac{1}{6}$ und $\varphi = \sin^{-1}\frac{1}{6} \approx 9{,}6^\circ$. Die Gerade trifft die Ebene also sehr flach. Rechnen Sie im Taschenrechner im Gradmaß (DEG) und kontrollieren Sie, dass der Winkel zwischen 0° und 90° liegt.

Systematische Übersicht der Lagen

Gerade–Gerade: identisch, parallel, schneidend, windschief. Gerade–Ebene: Schnittpunkt, parallel, enthalten. Ebene–Ebene: Schnittgerade, parallel, identisch. Dazu gehört jeweils ein fester Test: Richtungsvektoren vergleichen, Skalarprodukt $\vec{n} \circ \vec{u}$ prüfen oder Normalenvektoren vergleichen. Wer diese drei Tests beherrscht, löst fast jede Lageaufgabe im Abitur.

Anwendungen

Definition: Bahn trifft Boden

Bahn trifft Boden: Eine Flugbahn $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ trifft den Boden $x_3 = 0$ dort, wo die dritte Koordinate null ist. **Schatten:** Ein Punkt P wirft bei Lichteinfall in Richtung $\vec{l}$ einen Schatten auf die Ebene E: Man schneidet die Gerade $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{l}$ mit E. **Dachflächen:** Der First eines Daches ist die Schnittgerade zweier Dachebenen.

Weitere Beispiele

Beispiel 1: Schnittpunkt Gerade-Ebene

, $E: x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$. **Bestimmen Sie den Schnittpunkt.**

Einsetzen: $(1+t) + 2t + (2-t) = 7 \Rightarrow 3 + 2t = 7 \Rightarrow t = 2$. Schnittpunkt $S(3|2|0)$.

Schatten auf ebenen Flächen

Die Sonne ist so weit entfernt, dass alle Sonnenstrahlen parallel sind. Der Schatten eines Punktes P auf einer Fläche ist deshalb der Schnittpunkt der Geraden $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{s}$ mit der Ebene der Fläche, wobei $\vec{s}$ die Richtung der Strahlen ist. Den Schatten einer Strecke erhält man, indem man die Schatten ihrer Endpunkte verbindet. Fällt der Schatten auf einen Hang statt auf ebenen Boden, wird er je nach Neigung länger oder kürzer.

Beispiel 4: Schatten auf dem Hang

Ein 8 m hoher Mast steht mit dem Fußpunkt $F(10|0|-2)$ auf einem Hang $E:\ x_1 + 5x_3 = 0$. Die Sonnenstrahlen haben die Richtung $\vec{s} = (2|1|-2)^T$. Wo liegt der Schatten der Mastspitze?

Spitze $T(10|0|6)$. Gerade $\vec{x} = (10|0|6)^T + r(2|1|-2)^T$ in E:
$10 + 2r + 5(6-2r) = 0 \Rightarrow 40 - 8r = 0 \Rightarrow r = 5$. Schattenpunkt $(20|5|-4)$. Die Schattenlänge ist $|(10|5|-2)| = \sqrt{129} \approx 11{,}36$ m. Auf waagerechtem Boden in der Höhe -2 wäre der Schatten nur $\sqrt{80} \approx 8{,}94$ m lang, weil der Hang in Richtung des Schattens abfällt.

Die Schnittgerade zweier Ebenen – zwei Wege

Sind beide Ebenen in Koordinatenform gegeben, setzt man eine Variable gleich t und löst das Gleichungssystem aus zwei Gleichungen nach den beiden anderen Variablen auf. Ist eine Ebene in Parameterform gegeben, setzt man die Zeilen in die Koordinatenform der anderen ein; man erhält eine Beziehung zwischen den Parametern r und s, die man in die Parameterform zurückeinsetzt. Kontrolle: Der Richtungsvektor der Schnittgeraden steht auf beiden Normalenvektoren senkrecht.

Beispiel 5: Der First als Schnittgerade

Die Dachflächen eines Satteldachs liegen in $E_1:\ -x_2 + 2x_3 = 12$ und $E_2:\ x_2 + 2x_3 = 20$. Bestimmen Sie die Firstgerade und den Winkel zwischen den Dachflächen.

Addition der Gleichungen: $4x_3 = 32 \Rightarrow x_3 = 8$, dann $x_2 = 4$; $x_1 = t$ ist frei. First: $\vec{x} = (0|4|8)^T + t \cdot (1|0|0)^T$. Winkel: $\cos\varphi = \frac{|(0|-1|2) \circ (0|1|2)|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5}$, $\varphi \approx 53{,}13°$. Der Winkel innen am First beträgt $180° - 53{,}13° = 126{,}87°$.

Welche Fläche trifft der Strahl zuerst?

In einem Raum gibt es mehrere Begrenzungsflächen. Ein Lichtstrahl, der vom Punkt P in Richtung $\vec{u}$ ausgeht, trifft diejenige Ebene zuerst, für die sich der kleinste positive Parameter r ergibt. Negative Parameter gehören zu Punkten „hinter“ der Lichtquelle und spielen keine Rolle. Außerdem muss geprüft werden, ob der Schnittpunkt tatsächlich auf der begrenzten Fläche liegt, etwa innerhalb der Wandbreite.

Beispiel 6: Der Bühnenscheinwerfer

Ein Scheinwerfer hängt in $S(2|0|8)$ und strahlt in Richtung $(1|4|-2)^T$. Die Bühne ist $x_3 = 0$, die Rückwand $x_2 = 10$. Was wird beleuchtet?

Boden: $8 - 2r = 0 \Rightarrow r = 4$. Rückwand: $4r = 10 \Rightarrow r = 2{,}5$. Wegen $2{,}5$ trifft der Strahl zuerst die Rückwand im Punkt $(4{,}5|10|3)$, also 3 m über dem Bühnenboden.

Wusstest du? Grenzwerte für den Schattenwurf

In Deutschland gilt für Windkraftanlagen eine Richtlinie: Ein Wohnhaus darf höchstens 30 Stunden im Jahr und höchstens 30 Minuten am Tag vom bewegten Rotorschatten getroffen werden. Moderne Anlagen berechnen deshalb laufend mit Sonnenstand und Geometrie, ob ihr Schatten ein Haus trifft, und schalten sich notfalls automatisch ab. Dahinter stehen genau die Schnittberechnungen von Geraden und Ebenen aus diesem Kapitel.

Ein Prüfschema für Schnittaufgaben

Bei allen Schnittaufgaben hilft ein festes Schema. Erstens: Bringen Sie jede Ebene in Koordinatenform, denn dann genügt Einsetzen. Zweitens: Prüfen Sie vorab mit dem Skalarprodukt oder dem Vergleich der Normalenvektoren, ob überhaupt ein Schnitt zu erwarten ist. Drittens: Rechnen Sie den Schnitt aus und machen Sie die Probe, indem Sie das Ergebnis in beide Gleichungen einsetzen. Viertens: Deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. Ein Schnittpunkt mit negativem Parameter kann zum Beispiel bedeuten, dass ein Lichtstrahl die Fläche gar nicht erreicht, weil sie hinter der Lichtquelle liegt. Ebenso muss bei begrenzten Flächen wie Dachflächen, Wänden oder Segeln geprüft werden, ob der berechnete Punkt innerhalb der Begrenzung liegt. Wer dieses Schema einhält, vermeidet die meisten Fehler und erhält auch bei einem Rechenfehler noch Punkte für den richtigen Ansatz. Notieren Sie außerdem bei jedem Ergebnis eine kurze Deutung in Worten, denn genau diese Interpretation wird in Prüfungen oft gesondert bewertet.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Gerade $g:\ \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$ und Ebene $E:\ \vec{n} \circ \vec{x} = d$: Einsetzen ergibt $(\vec{n} \circ \vec{u})\, r = d - \vec{n} \circ \vec{a}$.
- $\vec{n} \circ \vec{u} \neq 0$: genau ein Schnittpunkt (Durchstoßpunkt). $\vec{n} \circ \vec{u} = 0$: g parallel zu E; liegt zusätzlich ein Punkt von g in E, dann $g \subset E$.
- Zwei Ebenen: Normalenvektoren Vielfache $\Rightarrow$ parallel oder identisch (Vergleich

der rechten Seiten); sonst Schnittgerade mit Richtungsvektor $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.
- Schnittgerade berechnen: eine Variable als Parameter t setzen, das lineare Gleichungssystem nach den beiden anderen auflösen.
- Schnittwinkel Gerade–Ebene: $\sin\varphi = \frac{|\vec{n} \circ \vec{u}|}{|\vec{n}|\,|\vec{u}|}$; Ebene–Ebene: $\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$; Gerade–Gerade: $\cos\varphi = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$.
- Neigungswinkel einer Ebene gegen den Boden: Winkel zwischen E und $x_3 = 0$, also mit $\vec{n}_2 = (0|0|1)^T$.
- Schatten und Lichtstrahlen: Gerade durch den Objektpunkt mit Richtung der Strahlen mit der Bodenebene (oder Wand) schneiden.
- Bei mehreren Flächen (Boden, Wand) zählt der Schnittpunkt mit dem kleinsten positiven Parameter: Diese Fläche trifft der Strahl zuerst.

Achtung: Typische Fehler

- Beim Einsetzen die Klammern vergessen: $2(1 + r)$ statt $2 \cdot 1 + r$.
- Den Fall $\vec{n} \circ \vec{u} = 0$ nicht weiter untersuchen (parallel oder enthalten?).
- Beim Schnittwinkel Gerade–Ebene Cosinus statt Sinus verwenden.
- Betrag im Zähler vergessen und einen stumpfen Winkel angeben.
- Richtungsvektor der Schnittgeraden mit $\vec{n}_1 + \vec{n}_2$ statt dem Kreuzprodukt berechnen.

Ottos Tipp: Fertige zu jeder Aufgabe eine kleine Skizze mit Pfeilen für Gerade und Normalenvektor. So siehst du sofort, ob sich Gerade und Ebene überhaupt treffen können!

Ottos Tipp

Zeichnen Sie sich eine Skizze mit Gerade und Ebene. So erkennen Sie vorab, welcher der drei Fälle zu erwarten ist, und merken schnell, wenn die Rechnung etwas anderes ergibt.