Arbeitsblatt - Lagebeziehungen und Schnittprobleme

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Gerade und Ebene: drei Fälle

Gegeben ist die Ebene $E:\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5$. Untersuchen Sie die Lage der Geraden zu E und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a)

b)

c)

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Den Durchstoßpunkt berechnen

Gegeben sind $E:\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$ und .

a) Berechnen Sie $\vec{n} \circ \vec{u}$ und entscheiden Sie, ob ein Schnittpunkt existiert.
b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt.
c) Machen Sie die Probe.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Ebene in Parameterform

Gegeben sind und .

a) Bestimmen Sie eine Koordinatenform von E.
b) Berechnen Sie den Schnittpunkt von g und E.
c) Bestimmen Sie die zugehörigen Parameter s und t und deuten Sie sie.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Lage zweier Ebenen

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen.

a) $E_1:\ x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und $E_2:\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$
b) $E_1:\ x_1 - x_2 = 3$ und $E_2:\ -2x_1 + 2x_2 = 4$
c) $E_1:\ x_1 + x_2 = 2$ und $E_2:\ x_2 + x_3 = 4$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Schnittgerade berechnen

Bestimmen Sie die Schnittgerade von $E_1:\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ und $E_2:\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5$.

a) Setzen Sie $x_3 = t$ und lösen Sie das Gleichungssystem.
b) Geben Sie die Schnittgerade in Parameterform an.
c) Kontrollieren Sie den Richtungsvektor mit dem Kreuzprodukt der Normalenvektoren.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Schnittwinkel Gerade–Ebene

Berechnen Sie den Schnittwinkel.

a) $g:\ \vec{x} = r \cdot (1|1|1)^T$ und die x_1x_2-Ebene
b) $g:\ \vec{x} = (1|0|0)^T + r \cdot (2|1|2)^T$ und $E:\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$
c) Warum steht im Zähler beim Winkel Gerade–Ebene der Sinus und nicht der Kosinus?

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Schnittwinkel zweier Ebenen

Berechnen Sie die Schnittwinkel.

a) $E_1:\ x_1 + x_2 + x_3 = 3$ und $E_2:\ x_1 - x_2 = 0$
b) $E:\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$ und die x_1x_2-Ebene (Neigungswinkel)
c) $E_1:\ x_1 + x_2 = 4$ und $E_2:\ x_2 + x_3 = 1$

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Schnittwinkel zweier Geraden

Die Geraden $g:\ \vec{x} = (1|1|1)^T + r \cdot (1|2|2)^T$ und $h:\ \vec{x} = (2|3|3)^T + s \cdot (2|-1|2)^T$ schneiden sich.

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt.
b) Berechnen Sie den Schnittwinkel.
c) Geben Sie einen Richtungsvektor einer Geraden an, die g und h im Schnittpunkt senkrecht schneidet.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Die Fahnenstange auf dem Dach

Die Dachfläche eines Bürogebäudes liegt in der Ebene $E:\ x_1 + 2x_3 = 24$ (in m). Durch das Dach wird eine senkrechte Fahnenstange geführt, deren Fußpunkt auf dem Dachboden des Gebäudes bei $(6|3|7)$ liegt.

a) Stellen Sie eine Gleichung der Stangengeraden auf.
b) Berechnen Sie den Durchstoßpunkt der Stange durch die Dachfläche.
c) Die Stange ist 6 m lang. Wie weit ragt sie über das Dach hinaus?
d) Berechnen Sie die Neigung der Dachfläche gegenüber der Waagerechten.

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Der Landeanflug

Ein Flugzeug befindet sich im Landeanflug auf den Flughafen Hamburg. Die Landebahn liegt in der x_1x_2-Ebene (Angaben in m, t in Minuten). Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist es im Punkt $A(-8000|1000|420)$ und fliegt geradlinig mit dem Verschiebungsvektor [redacted] pro Minute.

a) Wann und wo setzt das Flugzeug auf?
b) Berechnen Sie den Gleitwinkel, also den Winkel zwischen Flugbahn und Landebahnebene.
c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs in km/h.
d) In welcher Höhe ist das Flugzeug 30 Sekunden vor dem Aufsetzen?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Schatten auf dem Hang

Ein 8 m hoher Mast steht senkrecht mit dem Fußpunkt $F(10|0|-2)$ auf einem Hang, der in der Ebene $E:\ x_1 + 5x_3 = 0$ liegt (in m). Die Sonnenstrahlen haben die Richtung $\vec{s} = (2|1|-2)^T$.

a) Zeigen Sie, dass F in E liegt.
b) Bestimmen Sie den Schattenpunkt der Mastspitze auf dem Hang.
c) Berechnen Sie die Länge des Schattens.
d) Wie lang wäre der Schatten auf waagerechtem Boden in der Höhe des Fußpunkts? Erklären Sie den Unterschied.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Laser auf der Wand

Im Physikunterricht trifft ein Laserstrahl vom Punkt $L(0|0|1)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf eine senkrechte Wand in der Ebene $E:\ x_1 + x_2 = 6$ (in m).

a) Berechnen Sie den Auftreffpunkt.
b) Berechnen Sie den Winkel zwischen Strahl und Wand.
c) Die Wand ist $2{,}5$ m hoch. Trifft der Strahl die Wand?
d) Welchen Winkel schließt der Strahl mit dem Fußboden ein?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Die Dachflächen und der First

Die beiden Dachflächen eines Satteldachs liegen in $E_1:\ -x_2 + 2x_3 = 12$ und $E_2:\ x_2 + 2x_3 = 20$ (in m). Das Haus ist 8 m breit ($0 \le x_2 \le 8$).

a) Bestimmen Sie die Firstgerade als Schnittgerade.
b) Berechnen Sie die Traufhöhe bei $x_2 = 0$ und $x_2 = 8$.
c) Berechnen Sie den Neigungswinkel der Dachflächen.
d) Berechnen Sie den Winkel innen am First.
e) Ein Dachdecker meint: „Bei 45° Neigung wäre der First 4 m höher als die Traufe.“ Prüfen Sie die Aussage.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Die Erkundungsbohrung

Für eine Erdwärmeanlage wird vom Punkt $B(0|0|0)$ aus schräg in Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$ gebohrt (in m). Eine wasserführende Gesteinsschicht liegt zwischen den parallelen Ebenen $E_1:\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 = -500$ und $E_2:\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 = -750$.

a) Zeigen Sie, dass E_1 und E_2 parallel sind.
b) Berechnen Sie den Eintrittspunkt und den Austrittspunkt der Bohrung.
c) Wie lang ist das Bohrstück innerhalb der Schicht?
d) Unter welchem Winkel durchstößt die Bohrung die Schicht?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Schattenschlag der Windkraftanlage

Die Nabe einer Windkraftanlage liegt im Punkt $N(0|0|120)$, die Rotorblätter sind 60 m lang (in m, Boden: $x_3 = 0$). An einem Herbstnachmittag haben die Sonnenstrahlen die Richtung $\vec{s} = (3|4|-2)^T$. Ein Wohnhaus hat den Grundriss $150 \le x_1 \le 160$, $190 \le x_2 \le 210$ und ist 8 m hoch.

Punkt	Koordinaten
Nabe N	$(0\|0\|120)$
Blattspitze oben O	$(0\|0\|180)$
Hauswand	$x_1 = 150$

a) Wo liegt der Schatten der Nabe auf dem Boden? Wie weit ist er vom Turmfuß entfernt?
b) Wo liegt der Schatten der oberen Blattspitze?
c) Berechnen Sie, in welcher Höhe der Sonnenstrahl durch die Nabe die Ebene der Hauswand $x_1 = 150$ trifft. Trifft er das Haus?
d) Wie hoch steht die Sonne über dem Horizont?
e) Beurteilen Sie, ob das Haus zu dieser Zeit vom Rotorschatten betroffen ist, wenn man nur die Strahlen durch Nabe und obere Blattspitze betrachtet.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Eine Geradenschar und eine Ebene

Gegeben sind $E:\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3$ und $g_a:\ \vec{x} = (1|a|0)^T + r \cdot (1|0|2)^T$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass alle Geraden g_a parallel zu E sind.
b) Für welches a liegt g_a in E?
c) Beschreiben Sie die Menge aller Geraden g_a geometrisch.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Eine Ebenenschar und eine Gerade

Gegeben sind $E_a:\ x_1 + ax_2 + x_3 = 4$ und $g:\ \vec{x} = r \cdot (1|1|1)^T$.

a) Für welches a ist g parallel zu E_a? Liegt g dann in E_a?
b) Bestimmen Sie für alle anderen a den Schnittpunkt.
c) Für welches a liegt der Schnittpunkt bei $(1|1|1)$?
d) Für welches a steht g senkrecht auf E_a? Berechnen Sie dann den Schnittpunkt.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Das Sonnensegel

Über dem Sandkasten eines Kindergartens wird ein dreieckiges Sonnensegel an drei Pfosten gespannt: $A(0|0|3)$, $B(6|0|2)$, $C(0|4|2)$ (in m).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatenform der Segelebene.
b) Ein Regentropfen fällt senkrecht über dem Punkt $(3|1)$. In welcher Höhe trifft er auf das Segel? Liegt der Punkt innerhalb des Segels?
c) Berechnen Sie den Neigungswinkel des Segels gegenüber dem Boden.
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Segels.
e) Das Wasser läuft in Richtung des stärksten Gefälles ab. In welche Richtung (in der x_1x_2-Ebene) fließt es?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Wohin fällt das Scheinwerferlicht?

Auf einer Theaterbühne (Boden $x_3 = 0$, Rückwand $x_2 = 10$, Seitenwand $x_1 = 12$; in m) hängt ein Scheinwerfer in $S(2|0|8)$.

a) Der Scheinwerfer strahlt in Richtung $(1|4|-2)^T$. Welche Fläche trifft der Strahl zuerst, und wo?
b) Ein zweiter Strahl hat die Richtung $(1|2|-4)^T$. Wo trifft er auf?
c) Ein dritter Strahl hat die Richtung $(5|2|-1)^T$. Untersuchen Sie Boden, Rückwand und Seitenwand.
d) In welche Richtung $(1|k|-2)^T$ muss der Scheinwerfer zeigen, damit der Strahl genau die Kante zwischen Boden und Rückwand trifft?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Drei Ebenen (Knobelaufgabe)

Gegeben sind $E_1:\ x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $E_2:\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$ und $E_3:\ 2x_1 + kx_3 = 11$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Schnittgerade s von E_1 und E_2.
b) Für welches k enthält E_3 die Gerade s? Zeigen Sie, dass E_3 dann eine Linearkombination von E_1 und E_2 ist.
c) Zeigen Sie: Für alle anderen k haben die drei Ebenen genau einen gemeinsamen Punkt, und dieser hängt nicht von k ab.
d) Deuten Sie das Ergebnis geometrisch.