Lösungen - Lagebeziehungen und Schnittprobleme

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Die Geradengleichung wird zeilenweise in die Koordinatenform eingesetzt. Es entsteht eine lineare Gleichung für r: Eine Lösung bedeutet Schnittpunkt, ein Widerspruch bedeutet Parallelität, eine immer wahre Aussage bedeutet, dass die Gerade in der Ebene liegt.

a) Einsetzen: $2(1+r) - r + (1+r) = 5 \Rightarrow 3 + 2r = 5 \Rightarrow r = 1$. Schnittpunkt $S(2|1|2)$.
b) $2r - 2r + 0 = 5 \Rightarrow 0 = 5$: Widerspruch. $\vec{n} \circ \vec{u} = 0$, kein gemeinsamer Punkt: $g_2 \parallel E$.
c) $2 \cdot 2 - r + (1+r) = 5 \Rightarrow 5 = 5$: für alle r wahr. g_3 liegt in E.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Das Skalarprodukt von Normalenvektor und Richtungsvektor entscheidet vorab, ob überhaupt ein Schnittpunkt existiert. Danach wird die Gerade eingesetzt, r bestimmt und der Durchstoßpunkt berechnet. Die Probe in der Ebenengleichung bestätigt das Ergebnis.

a) $\vec{n} \circ \vec{u} = 1 - 2 - 2 = -3 \neq 0$: genau ein Schnittpunkt.
b) $(3+r) + 2(1-r) - (-2+2r) = 4 \Rightarrow 7 - 3r = 4 \Rightarrow r = 1$. $S(4|0|0)$.
c) $4 + 2 \cdot 0 - 0 = 4$ ✓.

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg: Ist die Ebene in Parameterform gegeben, wandelt man sie zuerst mit dem Kreuzprodukt in die Koordinatenform um. Dann wird die Gerade eingesetzt. Die Parameter s und t des Schnittpunkts erhält man anschließend aus der Parameterform der Ebene.

a) , $d = 1$: $x_1 - x_2 + x_3 = 1$.

b) $r - 2r + (4 - r) = 1 \Rightarrow 4 - 2r = 1 \Rightarrow r = 1{,}5$; Schnittpunkt $S(1{,}5|3|2{,}5)$.
c) $1 + s = 1{,}5 \Rightarrow s = 0{,}5$; $s + t = 3 \Rightarrow t = 2{,}5$; Probe dritte Zeile $t = 2{,}5$ ✓. S entsteht aus dem Stützpunkt durch $0{,}5$-mal den ersten und $2{,}5$-mal den zweiten Spannvektor.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Zuerst vergleicht man die Normalenvektoren. Sind sie Vielfache, entscheidet der Vergleich der rechten Seiten zwischen identisch und echt parallel. Sonst schneiden sich die Ebenen; die Schnittgerade erhält man, indem man eine Variable als Parameter wählt.

a) $\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$ und $d_2 = 2d_1$: Die Ebenen sind identisch.
b) $\vec{n}_2 = -2\vec{n}_1$, aber $-2 \cdot 3 = -6 \neq 4$: echt parallel.
c) Keine Vielfachen: Schnittgerade. $x_2 = t$: $x_1 = 2 - t$, $x_3 = 4 - t$;

$\vec{x} = (2|0|4)^T + t \cdot (-1|1|-1)^T$. Kontrolle: [redacted] ist ein Vielfaches

des Richtungsvektors.

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Man setzt eine Variable gleich t und löst die beiden Ebenengleichungen nach den übrigen Variablen auf, hier durch Addition. So erhält man jede Koordinate als Term in t und damit die Parameterform. Die Kontrolle mit dem Kreuzprodukt der Normalenvektoren sichert das Ergebnis.

a) I: $x_1 + x_2 = 4 - 2t$; II: $2x_1 - x_2 = 5 - t$. Addition: $3x_1 = 9 - 3t \Rightarrow x_1 = 3 - t$; dann $x_2 = 4 - 2t - 3 + t = 1 - t$.

b) .

c) [redacted] ✓, ein Vielfaches des Richtungsvektors.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Beim Winkel zwischen Gerade und Ebene wird der Normalenvektor verwendet, deshalb steht der Sinus in der Formel. Man berechnet Skalarprodukt und Beträge, setzt ein und bestimmt den Winkel mit dem Taschenrechner.

a) $\sin\varphi = \frac{|(0|0|1) \circ (1|1|1)|}{1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi \approx 35{,}26°$.
b) $\sin\varphi = \frac{|2+2+4|}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9} \Rightarrow \varphi \approx 62{,}73°$.
c) Der Normalenvektor steht senkrecht auf der Ebene. Der Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{n}$ ergänzt den gesuchten Winkel zu $90°$, und $\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist der Winkel zwischen ihren Normalenvektoren; mit dem Betrag im Zähler erhält man höchstens $90°$. Für den Neigungswinkel gegen den Boden verwendet man den Normalenvektor $(0|0|1)$ der x_1x_2-Ebene.

a) $\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = 1 - 1 + 0 = 0$: Die Ebenen stehen senkrecht aufeinander, $\varphi = 90°$.
b) $\cos\varphi = \frac{|2|}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \varphi \approx 48{,}19°$.
c) $\cos\varphi = \frac{|0+1+0|}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60°$.

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: Zuerst wird der Schnittpunkt durch Einsetzen bestätigt. Der Schnittwinkel folgt aus dem Kosinus mit den Richtungsvektoren. Ein Vektor, der auf beiden Richtungen senkrecht steht, ergibt sich aus dem Kreuzprodukt.

a) $r = 1$ in g ergibt $(2|3|3)$, den Stützpunkt von h ($s = 0$). Schnittpunkt $S(2|3|3)$.
b) $\cos\varphi = \frac{|2-2+4|}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9} \Rightarrow \varphi \approx 63{,}61°$.
c) .

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Die Fahnenstange ist eine senkrechte Gerade, deren Richtungsvektor nur eine x_3-Komponente hat. Einsetzen in die Dachebene liefert den Durchstoßpunkt. Der Überstand ergibt sich aus der Höhendifferenz, die Neigung des Daches aus dem Winkel zum Boden.

a) $\vec{x} = (6|3|7)^T + r \cdot (0|0|1)^T$.
b) $6 + 2(7 + r) = 24 \Rightarrow r = 2$: Durchstoßpunkt $D(6|3|9)$.
c) Die Spitze liegt bei $x_3 = 13$, also 4 m über dem Dach.
d) $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi \approx 26{,}57°$.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Das Aufsetzen ist der Schnittpunkt der Flugbahn mit der Ebene $x_3 = 0$. Der Gleitwinkel ist der Winkel zwischen Flugbahn und Landebahnebene und wird mit dem Sinus berechnet. Die Geschwindigkeit ist der Betrag des Verschiebungsvektors pro Minute.

a) $420 - 210t = 0 \Rightarrow t = 2$: Aufsetzen nach 2 Minuten im Ursprung $(0|0|0)$, der Landebahnschwelle.
b) $|\vec{u}| = \sqrt{4000^2 + 500^2 + 210^2} \approx 4036{,}6$; $\sin\varphi = \frac{210}{4036{,}6} \Rightarrow \varphi \approx 2{,}98°$, also der übliche Gleitwinkel von etwa $3°$.
c) $4036{,}6$ m pro Minute $\approx 242{,}2$ km/h.
d) $t = 1{,}5$: $x_3 = 420 - 315 = 105$ m.

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: Zuerst wird geprüft, dass der Fußpunkt im Hang liegt. Der Schatten der Spitze ist der Schnittpunkt des Sonnenstrahls durch die Spitze mit der Hangebene. Der Vergleich mit dem Schatten auf waagerechtem Boden zeigt den Einfluss der Neigung.

a) $10 + 5 \cdot (-2) = 0$ ✓.
b) $(10 + 2r) + 5(6 - 2r) = 0 \Rightarrow r = 5$: $(20|5|-4)$.
c) $|(10|5|-2)| = \sqrt{129} \approx 11{,}36$ m.

d) Boden $x_3 = -2$: $6 - 2r = -2 \Rightarrow r = 4$, Punkt $(18|4|-2)$; Länge $\sqrt{64+16} \approx 8{,}94$ m. Der Hang fällt in Schattenrichtung ab, deshalb ist der Schatten länger.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Der Laserstrahl wird in die Ebene der Wand eingesetzt. Danach werden der Winkel zur Wand mit dem Sinus und der Winkel zum Boden mit dem Normalenvektor $(0|0|1)$ berechnet. Die Auftreffhöhe wird mit der Wandhöhe verglichen.

a) $4r + 2r = 6 \Rightarrow r = 1$: $S(4|2|2)$.

b) $\sin\varphi = \frac{|4+2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{42}} \Rightarrow \varphi \approx 67{,}79°$.

c) Auftreffhöhe 2 m m: ja.

d) $\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{21}} \Rightarrow \psi \approx 12{,}60°$.

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Die Firstgerade ist die Schnittgerade der beiden Dachebenen; man erhält sie durch Addition der Gleichungen. Traufhöhen ergeben sich durch Einsetzen. Neigungswinkel und Winkel zwischen den Dachflächen werden mit den Normalenvektoren berechnet.

a) Addition: $4x_3 = 32 \Rightarrow x_3 = 8$, $x_2 = 4$: $\vec{x} = (0|4|8)^T + t \cdot (1|0|0)^T$.

b) E_1 mit $x_2 = 0$: $x_3 = 6$; E_2 mit $x_2 = 8$: $x_3 = 6$. Traufhöhe 6 m.

c) $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 26{,}57°$.

d) $\cos\varphi = \frac{|-1+4|}{5} = \frac{3}{5}$, $\varphi \approx 53{,}13°$; innen $180° - 53{,}13° = 126{,}87°$ $(= 180° - 2 \cdot 26{,}57°)$.

e) Richtig: Bei $45°$ steigt das Dach auf 4 m Horizontale um 4 m.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Die Bohrung ist eine Gerade, die Schichtgrenzen sind parallele Ebenen. Für jede Ebene bestimmt man den Parameter des Schnittpunkts. Die Länge im Gestein ist der Abstand der beiden Schnittpunkte, der Durchstoßwinkel folgt mit dem Sinus.

a) Gleiche Normalenvektoren, verschiedene rechte Seiten: echt parallel.

b) $\vec{n} \circ \vec{u} = 2 - 2 - 250 = -250$. E_1: $-250r = -500 \Rightarrow r = 2$: $P(4|-2|-50)$. E_2: $r = 3$: $Q(6|-3|-75)$.

c) m.

d) $\sin\varphi = \frac{250}{\sqrt{105}\cdot\sqrt{630}} \Rightarrow \varphi \approx 76{,}4°$.

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Die Schattenpunkte entstehen als Schnitte von Sonnenstrahlen mit dem Boden. Für die Hauswand schneidet man mit der Ebene $x_1 = 150$ und vergleicht die Höhe mit der Hauswand. Zum Schluss wird untersucht, aus welcher Höhe der Strahl stammt, der das Haus trifft.

a) $120 - 2r = 0 \Rightarrow r = 60$: $(180|240|0)$; Entfernung $\sqrt{180^2 + 240^2} = 300$ m.
b) $180 - 2r = 0 \Rightarrow r = 90$: $(270|360|0)$.
c) $3r = 150 \Rightarrow r = 50$: Punkt $(150|200|20)$. Die Wand ist nur 8 m hoch, der Strahl verläuft 12 m darüber. Bei $x_1 = 160$ ($r = \frac{160}{3}$) ist er noch $120 - \frac{320}{3} \approx 13{,}3$ m hoch: Er streift das Haus nicht.
d) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}} \Rightarrow \alpha \approx 21{,}8°$.
e) Der Strahl, der den Boden bei $(150|200|0)$ trifft, kommt von der Turmachse: $3r = 150$, $4r = 200 \Rightarrow r = 50$, Höhe $2 \cdot 50 = 100$ m. Für das Dach ($x_3 = 8$) ergibt sich ebenso eine Höhe von 108 m. In diesen Höhen (zwischen 60 m und 180 m) überstreichen die Rotorblätter die Turmachse. Das Haus wird also vom bewegten Blattschatten getroffen, obwohl der Nabenschatten darüber hinweggeht: Schattenschlag.

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: Das Skalarprodukt von Normalenvektor und Richtungsvektor ist für alle a null, also sind alle Geraden parallel zur Ebene. Eine Punktprobe mit dem Stützpunkt entscheidet, für welches a die Gerade sogar in der Ebene liegt.

a) $\vec{n} \circ \vec{u} = 2 + 0 - 2 = 0$ für jedes a.
b) Stützpunkt einsetzen: $2 + a = 3 \Rightarrow a = 1$.
c) Alle g_a haben denselben Richtungsvektor und gehen durch $(1|a|0)$. Für jeden ihrer Punkte $(1 + r|a|2r)$ gilt $2x_1 - x_3 = 2$: Die Geraden füllen die Ebene $2x_1 - x_3 = 2$, die parallel zur x_2-Achse ist; g_1 ist ihre Schnittgerade mit E.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: Ob die Gerade parallel zur Ebene ist, hängt hier vom Parameter ab: Man setzt $\vec{n} \circ \vec{u} = 0$. Für alle anderen Werte wird der Schnittpunkt allgemein berechnet. Orthogonalität bedeutet, dass Normalenvektor und Richtungsvektor Vielfache sind.

a) $\vec{n} \circ \vec{u} = 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2$. Der Ursprung erfüllt $0 = 4$ nicht: echt parallel.
b) $(2 + a)r = 4 \Rightarrow r = \frac{4}{2+a}$; .
c) $\frac{4}{2+a} = 1 \Rightarrow a = 2$.
d) $(1|a|1)$ muss ein Vielfaches von $(1|1|1)$ sein: $a = 1$; $r = \frac{4}{3}$, .

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Die Segelebene wird aus drei Ankerpunkten bestimmt. Für den Regentropfen setzt man die ersten beiden Koordinaten ein und löst nach der Höhe auf. Neigung, Fläche und Abflussrichtung ergeben sich aus dem Normalenvektor.

a) , gekürzt $(2|3|12)^T$; mit A: $2x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36$.

b) $6 + 3 + 12x_3 = 36 \Rightarrow x_3 = 2{,}25$ m. Der Grundriss ist das Dreieck mit $\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} \leq 1$; $\frac{3}{6} + \frac{1}{4} = 0{,}75 \leq 1$: innerhalb.

c) $\cos\varphi = \frac{12}{\sqrt{4+9+144}} = \frac{12}{\sqrt{157}} \Rightarrow \varphi \approx 16{,}7°$.

d) .

e) Die Höhe ist $x_3 = 3 - \frac{x_1}{6} - \frac{x_2}{4}$; sie fällt am stärksten in Richtung , also in Richtung $(2|3)$ auf dem Boden, zur Kante BC hin.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Für jede Fläche wird der Parameter des Schnittpunkts berechnet. Der kleinste positive Parameter zeigt, welche Fläche der Strahl zuerst trifft. In d) müssen zwei Bedingungen zugleich erfüllt sein, daraus folgt die gesuchte Richtung.

a) Boden: $r = 4$; Rückwand: $r = 2{,}5$. Zuerst die Rückwand bei $(4{,}5|10|3)$.
b) Boden: $8 - 4r = 0 \Rightarrow r = 2$, Punkt $(4|4|0)$; Rückwand erst bei $r = 5$. Der Strahl trifft den Boden.
c) Boden: $r = 8$; Rückwand: $2r = 10 \Rightarrow r = 5$; Seitenwand: $2 + 5r = 12 \Rightarrow r = 2$. Zuerst die Seitenwand bei $(12|4|6)$.
d) Boden bei $r = 4$ und Rückwand zur gleichen Zeit: $4k = 10 \Rightarrow k = 2{,}5$. Treffpunkt $(6|10|0)$.

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: Die Schnittgerade zweier Ebenen wird mit einem Parameter bestimmt und dann in die dritte Ebene eingesetzt. Eine für alle t wahre Gleichung bedeutet, dass die dritte Ebene die Gerade enthält; sonst gibt es genau einen gemeinsamen Punkt.

a) $x_3 = t$: $x_1 + x_2 = 6 - t$, $x_1 - x_2 = 5 - 2t \Rightarrow x_1 = 5{,}5 - 1{,}5t$, $x_2 = 0{,}5 + 0{,}5t$.

.

b) Einsetzen in E_3: $11 - 3t + kt = 11$ für alle $t \Rightarrow k = 3$. Dann ist $E_3:\ 2x_1 + 3x_3 = 11$ die Summe von E_1 und E_2.
c) Für $k \neq 3$: $(k-3)t = 0 \Rightarrow t = 0$; gemeinsamer Punkt $(5{,}5|0{,}5|0)$ für jedes $k \neq 3$.
d) Alle Ebenen E_3 gehen durch den Punkt $(5{,}5|0{,}5|0)$ der Geraden s und drehen sich um die Gerade $x_1 = 5{,}5$, $x_3 = 0$ (parallel zur x_2-Achse). Nur für $k = 3$ enthält E_3 ganz s.