Arbeitsblatt - Hypothesentests

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Hypothesen aufstellen

Formulieren Sie jeweils Nullhypothese und Gegenhypothese und geben Sie an, ob der Test rechtsseitig, linksseitig oder zweiseitig ist.

a) Eine Partei möchte nachweisen, dass sie die $5\,\%$-Hürde überspringt.
b) Ein Verbraucherverband vermutet, dass weniger als die angegebenen $20\,\%$ der Schokoladeneier eine Sonderfigur enthalten.
c) Es soll geprüft werden, ob eine Münze fair ist.
d) Ein Pharmaunternehmen will zeigen, dass sein neues Medikament bei mehr als $70\,\%$ der Patienten wirkt.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Fehler 1. und 2. Art im Sachzusammenhang

Ein Rauchmelder „testet“ ständig die Hypothese H_0: „Es brennt nicht.“ Bei zu viel Rauch in der Luft schlägt er Alarm.

a) Beschreiben Sie den Fehler 1. Art und den Fehler 2. Art.
b) Welcher Fehler ist hier schwerwiegender? Begründen Sie.
c) Wie sollte der Hersteller die Empfindlichkeit einstellen?
d) Übertragen Sie: Bei einem Coronaschnelltest lautet H_0: „Die Person ist nicht infiziert.“ Beschreiben Sie beide Fehler.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Irrtumswahrscheinlichkeit berechnen

Ein rechtsseitiger Test mit $H_0 : p = 0{,}4$ und $n = 50$ verwendet den Ablehnungsbereich $\{27; \ldots; 50\}$.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art.
b) Ist der Test auf dem Signifikanzniveau $5\,\%$ zulässig?
c) Wäre auch der Ablehnungsbereich $\{26; \ldots; 50\}$ zulässig?
d) Berechnen Sie β für $p_1 = 0{,}6$.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Rechtsseitiger Test

Bestimmen Sie für $n = 100$ und $H_0 : p \leq 0{,}2$ den Ablehnungsbereich des rechtsseitigen

Tests auf dem Signifikanzniveau $5\,\%$.

a) Geben Sie H_1 und die Verteilung der Testgröße im Grenzfall an.
b) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich mit beiden Nachbarwerten.
c) Geben Sie die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit an.
d) Wie lautet die Entscheidungsregel bei 23 Treffern?

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Linksseitiger Test

Bestimmen Sie für $n = 80$ und $H_0 : p \geq 0{,}75$ den Ablehnungsbereich des linksseitigen Tests auf dem Signifikanzniveau $5\,\%$.

a) Berechnen Sie μ und σ im Grenzfall $p = 0{,}75$.
b) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich.
c) Geben Sie die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit an.
d) Wie entscheidet man bei 54 Treffern?

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Zweiseitiger Test

Eine Münze soll mit $n = 100$ Würfen auf Fairness getestet werden ($\alpha = 5\,\%$).

a) Geben Sie H_0 und H_1 an.
b) Bestimmen Sie die linke Grenze des Ablehnungsbereichs.
c) Bestimmen Sie die rechte Grenze.
d) Geben Sie den Ablehnungsbereich und die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit an.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Der Würfel aus dem 3D-Drucker

Emil wirft seinen selbst gedruckten Würfel 120-mal. Er will mit $\alpha = 5\,\%$ prüfen, ob die Sechs häufiger fällt als bei einem fairen Würfel.

a) Formulieren Sie die Hypothesen.
b) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich.
c) Emil zählt 27 Sechsen. Wie entscheidet er?
d) Seine Freundin Clara wirft einen anderen Würfel und erhält 31 Sechsen. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Satz.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Saatgut aus dem Gartencenter

Ein Hersteller garantiert auf seinen Tomatensamen eine Keimfähigkeit von mindestens $90\,\%$. Eine Gärtnerei im Knoblauchsland bei Nürnberg zweifelt daran und sät 200 Samen aus.

a) Formulieren Sie die Hypothesen aus Sicht der Gärtnerei.
b) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich für $\alpha = 5\,\%$.
c) Es keimen 168 Samen. Wie entscheidet die Gärtnerei?
d) Beschreiben Sie den Fehler 1. Art im Sachzusammenhang und seine Folgen für den Hersteller.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Die Lernapp der Fahrschule

Bisher bestehen $60\,\%$ der Schülerinnen und Schüler einer Fahrschule in Dresden die theoretische Führerscheinprüfung im ersten Versuch. Die Fahrschule führt eine Lernapp ein und will nachweisen, dass die Quote gestiegen ist. Die nächsten 50 Prüflinge bilden die Stichprobe.

a) Formulieren Sie die Hypothesen.
b) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich für $\alpha = 5\,\%$.
c) 38 Prüflinge bestehen. Was darf die Fahrschule in ihrer Werbung schreiben?
d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Test eine Steigerung auf $75\,\%$ übersieht.

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Verspätete Pakete

Ein Paketdienst wirbt: „Höchstens $10\,\%$ unserer Pakete kommen verspätet an.“ Ein Onlinehändler aus Bielefeld prüft 100 zufällig ausgewählte Sendungen.

a) Der Händler will die Werbeaussage widerlegen. Formulieren Sie die Hypothesen.
b) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich für $\alpha = 5\,\%$.
c) 15 Pakete sind verspätet. Entscheiden Sie.
d) Ab welcher Zahl verspäteter Pakete hätte der Händler bei $\alpha = 1\,\%$ widersprochen?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Die Güte eines Tests

Für den Test mit $n = 100$, $H_0 : p \le 0{,}2$ und Ablehnungsbereich $\{28; \dots; 100\}$ soll untersucht werden, wie gut er Abweichungen erkennt.

wahres p_1	$0{,}25$	$0{,}30$	$0{,}35$	$0{,}40$
β	?	?	?	?

a) Begründen Sie: $\beta(p_1) = P_{p_1}(X \le 27)$.
b) Füllen Sie die Tabelle aus.
c) Beschreiben Sie, wie β von p_1 abhängt.
d) Berechnen Sie die Güte $1 - \beta$ für $p_1 = 0{,}35$ und deuten Sie sie.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Die Fünfprozenthürde

Eine kleine Partei möchte vor der Landtagswahl in Thüringen nachweisen, dass sie die Fünfprozenthürde überspringen wird. Ein Institut befragt $1\,000$ Wahlberechtigte.

a) Formulieren Sie die Hypothesen.
b) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich für $\alpha = 5\,\%$.
c) 62 Befragte nennen die Partei. Wie lautet das Testergebnis?
d) Die Partei verkündet: „Wir liegen bei $6{,}2\,\%$ und sind sicher im Landtag.“ Nehmen Sie Stellung.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Welche Urne war es?

Beim Spieleabend des Mathe-Leistungskurses steht eine Urne auf dem Tisch. Sie ist entweder Urne A ($30\,\%$ rote Kugeln) oder Urne B ($60\,\%$ rote Kugeln). Man zieht 20-mal mit Zurücklegen und entscheidet sich für B, wenn mindestens 9 rote Kugeln gezogen werden (Alternativtest mit H_0: Urne A).

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, sich irrtümlich für B zu entscheiden.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, sich irrtümlich für A zu entscheiden.
c) Wie müsste man die Grenze legen, damit beide Fehler etwa gleich groß werden?
d) Begründen Sie, warum man beim Alternativtest beide Fehlerwahrscheinlichkeiten berechnen kann.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Nebenwirkungen eines Medikaments

Laut Beipackzettel tritt eine bestimmte Nebenwirkung bei höchstens $8\,\%$ der Patienten auf. Eine Hausärztin in Mainz beobachtet bei 120 Patienten 15 Fälle.

a) Formulieren Sie die Hypothesen der Ärztin, die eine höhere Rate vermutet.
b) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich für $\alpha = 5\,\%$.
c) Wie entscheidet sie?
d) Warum ist hier ein Fehler 2. Art besonders problematisch, und wie könnte man ihn verkleinern?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Displays für Smartphones

Ein Elektronikhersteller bezieht Displays von einem Zulieferer, der einen Ausschussanteil von höchstens $3\,\%$ garantiert. Bei jeder Lieferung werden n Displays geprüft. Weil eine Reklamation teuer und aufwendig ist, wählt der Hersteller das Signifikanzniveau $1\,\%$.

Größe	Stichprobe 1	Stichprobe 2
Umfang n	200	400
Ablehnungsbereich	?	?
β für $p_1 = 0{,}06$	?	?

a) Formulieren Sie die Hypothesen.
b) Bestimmen Sie für $n = 200$ den Ablehnungsbereich.
c) Berechnen Sie für $n = 200$ die Wahrscheinlichkeit, eine Lieferung mit $6\,\%$ Ausschuss nicht zu reklamieren.
d) Ergänzen Sie die Tabelle für $n = 400$.
e) Beurteilen Sie, welche Stichprobengröße der Hersteller wählen sollte.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Die belgische Euromünze

Im Jahr 2002 berichteten Statistiker, dass eine belgische 1-Euro-Münze beim Drehen auf dem Tisch häufiger auf „Kopf“ falle. Ein Mathe-Leistungskurs in Aachen will das mit 200 Würfen einer belgischen Münze überprüfen.

a) Begründen Sie, warum hier ein zweiseitiger Test sinnvoll ist, und formulieren Sie die Hypothesen.
b) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich für $\alpha = 5\,\%$.
c) Der Kurs erhält 112-mal „Kopf“. Entscheiden Sie.
d) Welcher Anteil „Kopf“ wäre mindestens nötig gewesen, um die Fairness abzulehnen?
e) Ein Schüler schlägt vor, nach dem Ergebnis einen rechtsseitigen Test zu wählen, weil dann schon weniger Treffer reichen. Beurteilen Sie den Vorschlag.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Wie wirkt das Signifikanzniveau?

Ein Spieleverlag behauptet, sein neues Kartenspiel werde von höchstens der Hälfte der Testspieler als „zu schwer“ bewertet. Ein Testmagazin will das Gegenteil nachweisen und befragt 50 Spieler. Es untersucht, wie sich die Wahl von α auswirkt, wenn der wahre Anteil $65\,\%$ beträgt.

α	Ablehnungsbereich	tatsächliches α^*	β für $p_1 = 0{,}65$
$10\,\%$	?	?	?
$5\,\%$	?	?	?
$1\,\%$	?	?	?

a) Formulieren Sie die Hypothesen.
b) Füllen Sie die Tabelle aus.
c) Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen α und β.
d) Wie kann man beide Fehler gleichzeitig verkleinern?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Jedes fünfte Ei?

Ein Süßwarenhersteller wirbt damit, dass jedes fünfte Schokoladenei eine Sammelfigur enthält. Eine Verbraucherzentrale öffnet 150 Eier aus verschiedenen Supermärkten und findet 21 Sammelfiguren.

a) Formulieren Sie die Hypothesen der Verbraucherzentrale.
b) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich für $\alpha = 5\,\%$.
c) Entscheiden Sie und formulieren Sie einen Antwortsatz.
d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art bei diesem Test.
e) Der Hersteller entgegnet, die Eier seien nicht zufällig ausgewählt worden. Erklären Sie, warum dieser Einwand wichtig ist.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Der Cola-Geschmackstest

Jan behauptet, er könne Markencola und Billigcola am Geschmack unterscheiden. Seine Mitschüler reichen ihm 20-mal einen Becher, in dem zufällig eine der beiden Sorten ist. Wenn Jan nur rät, liegt er jedes Mal mit $50\,\%$ richtig. Die Klasse will ihm nur glauben, wenn er auf dem Niveau $5\,\%$ besser als Raten ist.

a) Formulieren Sie die Hypothesen.
b) Bestimmen Sie, wie viele richtige Antworten Jan mindestens geben muss.
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er den Test, wenn er nur rät?
d) Jan erkennt die Sorte in Wahrheit mit $80\,\%$. Wie wahrscheinlich fällt er trotzdem durch?
e) Wie müsste der Versuch geändert werden, damit Jan mit seinen $80\,\%$ mit mindestens $95\,\%$ Wahrscheinlichkeit besteht? Geben Sie eine Idee an.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Wie groß muss die Stichprobe sein? (Knobelaufgabe)

Ein rechtsseitiger Test mit $H_0 : p \leq 0{,}5$ und $\alpha = 5\,\%$ soll eine Trefferwahrscheinlichkeit von $p_1 = 0{,}7$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $90\,\%$ erkennen, also $\beta \leq 0{,}1$.

a) Begründen Sie mit der Normalverteilung: Die Grenze k des Ablehnungsbereichs liegt etwa bei $0{,}5n + 1{,}645 \cdot 0{,}5\sqrt{n}$, und für $\beta \leq 0{,}1$ muss k etwa $0{,}7n - 1{,}282\sqrt{0{,}21}\sqrt{n}$ nicht überschreiten.
b) Leiten Sie daraus die Näherung $\sqrt{n} \geq \frac{1{,}645 \cdot 0{,}5 + 1{,}282\sqrt{0{,}21}}{0{,}2}$ her und berechnen Sie n.
c) Überprüfen Sie mit der Binomialverteilung, dass $n = 53$ die Bedingung erfüllt (Ablehnungsbereich ab 33).
d) Warum liefert die exakte Rechnung ein etwas größeres n als die Näherung?