Lösungen - Hypothesentests

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Die Aussage, die man nachweisen möchte, kommt immer in die Gegenhypothese H_1; die Nullhypothese ist das Gegenteil und enthält den Grenzwert p_0. Die Richtung von H_1 bestimmt die Testart: „größer“ rechtsseitig, „kleiner“ linksseitig, „ungleich“ zweiseitig.

a) $H_0 : p \leq 0{,}05$, $H_1 : p > 0{,}05$; rechtsseitig.
b) $H_0 : p \geq 0{,}2$, $H_1 : p$; linksseitig.
c) $H_0 : p = 0{,}5$, $H_1 : p \neq 0{,}5$; zweiseitig.
d) $H_0 : p \leq 0{,}7$, $H_1 : p > 0{,}7$; rechtsseitig. Die nachzuweisende Aussage steht jeweils in H_1.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Der Fehler 1. Art bedeutet, H_0 abzulehnen, obwohl sie stimmt; der Fehler 2. Art bedeutet, H_0 beizubehalten, obwohl sie falsch ist. Diese Definitionen werden in die Sprache der Situation übersetzt, danach wird abgewogen, welcher Fehler die schlimmeren Folgen hat.

a) Fehler 1. Art: Alarm, obwohl es nicht brennt (Fehlalarm, etwa beim Kochen). Fehler 2. Art: kein Alarm, obwohl es brennt.
b) Der Fehler 2. Art, denn er gefährdet Menschenleben; ein Fehlalarm ist nur lästig.
c) Sehr empfindlich: Man nimmt mehr Fehlalarme (größeres α) in Kauf, um β klein zu halten.
d) Fehler 1. Art: positives Ergebnis bei einer gesunden Person (falsch positiv). Fehler 2. Art: negatives Ergebnis bei einer infizierten Person (falsch negativ).

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg: Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit des Ablehnungsbereichs unter der Annahme $p = p_0$. Man berechnet sie über das Gegenereignis und vergleicht mit α. Für β wird dagegen der Annahmebereich mit der Trefferwahrscheinlichkeit p_1 berechnet.

a) $\alpha^* = P(X \geq 27) = 1 - P(X \leq 26) \approx 0{,}0314$.
b) Ja, denn $0{,}0314 \leq 0{,}05$.
c) $P(X \geq 26) \approx 0{,}0573 > 0{,}05$: nicht zulässig. Der Bereich $\{27; \ldots; 50\}$ ist also der größtmögliche.
d) $\beta = P_{0{,}6}(X \leq 26) \approx 0{,}1562$.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Beim rechtsseitigen Test sucht man das kleinste k, für das

$P(X \geq k) \leq \alpha$ gilt. Dazu tabelliert man $1 - P(X \leq k-1)$ in der Nähe von $\mu + 2\sigma$ und notiert beide Nachbarwerte. Die Entscheidungsregel ergibt sich direkt aus dem Ablehnungsbereich.

a) $H_1 : p > 0{,}2$; $X \sim B(100; 0{,}2)$.
b) $P(X \geq 27) \approx 0{,}0558 > 0{,}05$, $P(X \geq 28) \approx 0{,}0342 \leq 0{,}05$: Ablehnungsbereich $\{28; \ldots; 100\}$.
c) $\alpha^* \approx 0{,}0342$.
d) 23 liegt im Annahmebereich: H_0 wird nicht abgelehnt.

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Beim linksseitigen Test liegt der Ablehnungsbereich bei kleinen Trefferzahlen. Gesucht ist das größte k mit $P(X \leq k) \leq \alpha$. Erwartungswert und Standardabweichung helfen beim Suchen, denn die Grenze liegt etwa bei $\mu - 1{,}645\sigma$.

a) $\mu = 60$, $\sigma = \sqrt{80 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25} = \sqrt{15} \approx 3{,}87$.
b) $P(X \leq 53) \approx 0{,}0499 \leq 0{,}05$, $P(X \leq 54) \approx 0{,}0805 > 0{,}05$: Ablehnungsbereich $\{0; \ldots; 53\}$.
c) $\alpha^* \approx 0{,}0499$.
d) 54 liegt im Annahmebereich: H_0 wird beibehalten.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Beim zweiseitigen Test wird α gleichmäßig auf beide Seiten verteilt. Für die linke Grenze gilt $P(X \leq k) \leq 0{,}025$, die rechte Grenze folgt hier aus der Symmetrie der Verteilung mit $p = 0{,}5$. Die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit ist die Summe beider Ränder.

a) $H_0 : p = 0{,}5$, $H_1 : p \neq 0{,}5$.
b) Größtes k mit $P(X \leq k) \leq 0{,}025$: $P(X \leq 39) \approx 0{,}0176$, $P(X \leq 40) \approx 0{,}0284$; also $k = 39$.
c) Aus Symmetrie: $P(X \geq 61) \approx 0{,}0176 \leq 0{,}025$; also ab 61.
d) $\{0; \ldots; 39\} \cup \{61; \ldots; 100\}$; $\alpha^* \approx 2 \cdot 0{,}0176 = 0{,}0352$.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: Emil vermutet zu viele Sechsen, also ein rechtsseitiger Test mit $p_0 = \frac{1}{6}$. Nach der Bestimmung des Ablehnungsbereichs wird das Stichprobenergebnis eingeordnet. Wichtig ist die vorsichtige Formulierung: Ein nicht signifikantes Ergebnis beweist nicht, dass der Würfel fair ist.

a) $H_0 : p \leq \frac{1}{6}$, $H_1 : p > \frac{1}{6}$; $X \sim B\left(120; \frac{1}{6}\right)$ im Grenzfall.
b) $P(X \geq 27) \approx 0{,}0597 > 0{,}05$; $P(X \geq 28) \approx 0{,}0373 \leq 0{,}05$. Ablehnungsbereich $\{28; \ldots; 120\}$.
c) 27 liegt nicht im Ablehnungsbereich; H_0 wird nicht abgelehnt. Das heißt nicht, dass der Würfel fair ist.
d) $31 \geq 28$: Auf dem Signifikanzniveau $5\,\%$ kann man nachweisen, dass Claras Würfel die Sechs zu häufig zeigt.

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: Die Gärtnerei möchte eine zu geringe Keimfähigkeit nachweisen, also steht p in H_1 und der Test ist linksseitig. Mit dem Ablehnungsbereich wird das Ergebnis der Aussaat bewertet. Der Fehler 1. Art wird aus Sicht des Herstellers gedeutet.

a) $H_0 : p \geq 0{,}9$, $H_1 : p$.
b) $P(X \leq 172) \approx 0{,}0434 \leq 0{,}05$, $P(X \leq 173) \approx 0{,}0672 > 0{,}05$: $\{0; \ldots; 172\}$.
c) $168 \leq 172$: H_0 wird abgelehnt; die Gärtnerei reklamiert.
d) Die Gärtnerei reklamiert, obwohl das Saatgut die Garantie erfüllt. Der Hersteller müsste zu Unrecht Ersatz leisten oder verliert einen Kunden.

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Die Fahrschule will eine höhere Bestehensquote nachweisen, das ergibt einen rechtsseitigen Test mit $p_0 = 0{,}6$. Nach Ablehnungsbereich und Entscheidung wird β für $p_1 = 0{,}75$ berechnet: die Wahrscheinlichkeit, dass der Test eine echte Verbesserung übersieht.

a) $H_0 : p \leq 0{,}6$, $H_1 : p > 0{,}6$.
b) $P(X \geq 36) \approx 0{,}0540 > 0{,}05$, $P(X \geq 37) \approx 0{,}0280 \leq 0{,}05$: $\{37; \ldots; 50\}$.
c) $38 \geq 37$: Die Steigerung ist auf dem $5\,\%$-Niveau signifikant. Die Fahrschule darf schreiben, dass die Bestehensquote nachweislich gestiegen ist.
d) $\beta = P_{0{,}75}(X \leq 36) \approx 0{,}3630$.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Der Händler will die Werbeaussage widerlegen, also gehört „mehr als $10\,\%$ verspätet“ in H_1. Der rechtsseitige Ablehnungsbereich wird bestimmt und das Stichprobenergebnis eingeordnet. Zum Vergleich wird die Grenze für das strengere Niveau $1\,\%$ berechnet.

a) $H_0 : p \leq 0{,}1$, $H_1 : p > 0{,}1$.
b) $P(X \geq 15) \approx 0{,}0726 > 0{,}05$, $P(X \geq 16) \approx 0{,}0399 \leq 0{,}05$: $\{16; \ldots; 100\}$.
c) 15 liegt im Annahmebereich; die Werbeaussage lässt sich nicht widerlegen.
d) Ab 19 verspäteten Paketen: $P(X \geq 19) \approx 0{,}0046 \leq 0{,}01$.

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: Für jedes p_1 aus der Gegenhypothese ist β die Wahrscheinlichkeit des Annahmebereichs. Die Tabelle zeigt, wie die Trennschärfe des Tests mit dem Abstand zwischen p_1 und p_0 wächst. Die Güte $1 - \beta$ wird im Sachzusammenhang gedeutet.

a) Ein Fehler 2. Art liegt vor, wenn X im Annahmebereich $\{0; \ldots; 27\}$ liegt, obwohl $p = p_1 > 0{,}2$ gilt.
b) $\beta(0{,}25) \approx 0{,}7224$; $\beta(0{,}3) \approx 0{,}2964$; $\beta(0{,}35) \approx 0{,}0558$; $\beta(0{,}4) \approx 0{,}0046$.
c) Je weiter p_1 von $0{,}2$ entfernt ist, desto kleiner ist β. Kleine Abweichungen wie $p_1 = 0{,}25$ werden meist übersehen.
d) $1 - \beta \approx 0{,}9442$: Beträgt der wahre Anteil $35\,\%$, erkennt der Test dies in etwa $94\,\%$

der Fälle.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Die Partei möchte zeigen, dass sie über $5\,\%$ liegt, also rechtsseitiger Test. Wegen $n = 1\,000$ liegt die Grenze nur wenig über dem Erwartungswert. Am Ende wird die Aussage der Partei kritisch geprüft, denn ein Test liefert nie Sicherheit.

a) $H_0 : p \leq 0{,}05$, $H_1 : p > 0{,}05$.
b) $\mu = 50$, $\sigma \approx 6{,}89$. $P(X \geq 62) \approx 0{,}0511 > 0{,}05$, $P(X \geq 63) \approx 0{,}0384 \leq 0{,}05$: $\{63; \ldots; 1\,000\}$.
c) 62: H_0 wird nicht abgelehnt. Ein Überspringen der Hürde ist nicht signifikant nachgewiesen.
d) Die Aussage ist zu stark: $6{,}2\,\%$ ist nur ein Schätzwert, und selbst ein signifikantes Ergebnis wäre keine Sicherheit. Außerdem kann sich die Stimmung bis zur Wahl ändern.

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Beim Alternativtest stehen sich zwei konkrete Werte von p gegenüber. Beide Fehlerwahrscheinlichkeiten lassen sich deshalb direkt berechnen: α mit $p = 0{,}3$ über den Ablehnungsbereich, β mit $p = 0{,}6$ über den Annahmebereich. Danach wird die Grenze variiert.

a) $\alpha = P_{0{,}3}(X \geq 9) = 1 - P_{0{,}3}(X \leq 8) \approx 0{,}1133$.
b) $\beta = P_{0{,}6}(X \leq 8) \approx 0{,}0565$.
c) Grenze 8: $\alpha \approx 0{,}2277$, $\beta \approx 0{,}0210$. Grenze 9 ist ausgewogener; bei Grenze 10 wäre $\alpha \approx 0{,}0480$, $\beta \approx 0{,}1275$. Am ausgewogensten ist also Grenze 9.
d) Beide Hypothesen nennen genau einen Wert von p; deshalb ist die Verteilung der Testgröße in beiden Fällen bekannt.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Die Ärztin vermutet eine erhöhte Nebenwirkungsrate: rechtsseitiger Test mit $p_0 = 0{,}08$. Nach dem Ablehnungsbereich wird entschieden. Besonders wichtig ist hier die Diskussion des Fehlers 2. Art, weil er Patienten gefährden kann.

a) $H_0 : p \leq 0{,}08$, $H_1 : p > 0{,}08$.
b) $P(X \geq 15) \approx 0{,}0564$, $P(X \geq 16) \approx 0{,}0301 \leq 0{,}05$: $\{16; \ldots; 120\}$.
c) 15: H_0 wird nicht abgelehnt; die Beobachtung reicht nicht für eine Meldung als signifikant erhöhte Rate.
d) Eine tatsächlich erhöhte Nebenwirkungsrate bliebe unentdeckt und Patienten wären gefährdet. Abhilfe: größere Stichprobe (Daten mehrerer Praxen) oder größeres α.

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Für beide Stichprobengrößen werden Ablehnungsbereich und β berechnet und in die Tabelle eingetragen. Der Vergleich zeigt, dass ein größerer Stichprobenumfang die Trennschärfe stark verbessert. Die Entscheidung berücksichtigt

Prüfaufwand und Risiko.

a) $H_0 : p \leq 0{,}03$, $H_1 : p > 0{,}03$.
b) $P(X \geq 12) \approx 0{,}0184 > 0{,}01$, $P(X \geq 13) \approx 0{,}0078 \leq 0{,}01$: $\{13; \ldots; 200\}$.
c) $\beta = P_{0{,}06}(X \leq 12) \approx 0{,}5760$: Mehr als die Hälfte solcher Lieferungen würde angenommen.
d) $n = 400$: $P(X \geq 22) \approx 0{,}0053 \leq 0{,}01$, Ablehnungsbereich $\{22; \ldots; 400\}$;
$\beta = P_{0{,}06}(X \leq 21) \approx 0{,}3073$.
e) Mit $n = 200$ ist der Test sehr unscharf. $n = 400$ verdoppelt den Prüfaufwand, senkt β aber deutlich; wenn die Prüfung nicht zerstörend ist, lohnt sich die größere Stichprobe.

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: Ohne Vorwissen über die Richtung einer Abweichung ist ein zweiseitiger Test angebracht. Der Ablehnungsbereich besteht aus zwei symmetrischen Rändern mit je höchstens $2{,}5\,\%$. Am Ende wird begründet, warum die Testart nicht nachträglich gewählt werden darf.

a) Vor dem Versuch weiß man nicht, in welche Richtung eine Abweichung geht.
$H_0 : p = 0{,}5$, $H_1 : p \neq 0{,}5$.
b) Links: $P(X \leq 85) \approx 0{,}0200 \leq 0{,}025$, $P(X \leq 86) \approx 0{,}0280$. Rechts symmetrisch ab 115. Ablehnungsbereich $\{0; \ldots; 85\} \cup \{115; \ldots; 200\}$.
c) 112 liegt im Annahmebereich: Die Fairness kann nicht abgelehnt werden.
d) 115 von 200, also $57{,}5\,\%$.
e) Das ist unzulässig: Die Testart muss vor der Datenerhebung feststehen. Wer sie nachträglich wählt, erhöht die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: Für drei Signifikanzniveaus werden jeweils Ablehnungsbereich, tatsächliches α^* und β für $p_1 = 0{,}65$ berechnet. Die Tabelle macht den Zusammenhang sichtbar: Wer den Fehler 1. Art verkleinert, vergrößert bei gleichem n den Fehler 2. Art.

a) $H_0 : p \leq 0{,}5$, $H_1 : p > 0{,}5$.
b) $\alpha = 10\,\%$: $\{31; \ldots; 50\}$, $\alpha^* \approx 0{,}0595$, $\beta \approx 0{,}2736$.
$\alpha = 5\,\%$: $\{32; \ldots; 50\}$, $\alpha^* \approx 0{,}0325$, $\beta \approx 0{,}3784$.
$\alpha = 1\,\%$: $\{34; \ldots; 50\}$, $\alpha^* \approx 0{,}0077$, $\beta \approx 0{,}6111$.
c) Je kleiner α, desto kleiner der Ablehnungsbereich und desto größer β. Bei festem n kann man nicht beide Fehler zugleich verkleinern.
d) Nur durch einen größeren Stichprobenumfang n.

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Die Verbraucherzentrale will zeigen, dass weniger Figuren enthalten sind, also linksseitiger Test mit $p_0 = 0{,}2$. Ablehnungsbereich und Entscheidung werden bestimmt. Abschließend wird die Voraussetzung einer zufälligen und unabhängigen Stichprobe diskutiert.

a) $H_0 : p \geq 0{,}2$, $H_1 : p$.
b) $P(X \leq 21) \approx 0{,}0372 \leq 0{,}05$, $P(X \leq 22) \approx 0{,}0590 > 0{,}05$: $\{0; \ldots; 21\}$.

c) 21 liegt im Ablehnungsbereich: Auf dem Signifikanzniveau $5\,\%$ ist nachgewiesen, dass weniger als jedes fünfte Ei eine Sammelfigur enthält.
d) Höchstens $\alpha^* \approx 0{,}0372$.
e) Der Test setzt eine Bernoulli-Kette voraus. Stammen die Eier etwa aus einer einzigen Charge, können sie voneinander abhängen, und das Ergebnis ist nicht auf die gesamte Produktion übertragbar.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Raten entspricht $p = 0{,}5$; Jans Fähigkeit soll nachgewiesen werden und steht deshalb in H_1. Nach der Mindestanzahl richtiger Antworten werden α^* und β für seine wahre Trefferquote berechnet. Ein größerer Versuchsumfang würde β senken.

a) $H_0 : p \leq 0{,}5$ (Jan rät), $H_1 : p > 0{,}5$.
b) $P(X \geq 14) \approx 0{,}0577 > 0{,}05$, $P(X \geq 15) \approx 0{,}0207 \leq 0{,}05$: mindestens 15 richtige Antworten.
c) $\alpha^* \approx 0{,}0207$.
d) $\beta = P_{0{,}8}(X \leq 14) \approx 0{,}1958$.
e) Mehr Versuche, zum Beispiel 40 Becher: Dann liegen die Verteilungen für $p = 0{,}5$ und $p = 0{,}8$ relativ zueinander weiter auseinander, und β sinkt.

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: Mit der Normalverteilung werden die Grenze des Ablehnungsbereichs und die Bedingung für β als Ungleichungen in $\sqrt{n}$ geschrieben. Die Näherung liefert einen Startwert, die exakte Binomialrechnung bestätigt den Mindestumfang. Die Abweichung erklärt sich durch die diskrete Verteilung.

a) Unter H_0 ist X näherungsweise $N(0{,}5n; 0{,}5\sqrt{n})$; die oberen $5\,\%$ beginnen bei $\mu + 1{,}645\sigma$. Unter p_1 ist $\sigma = \sqrt{0{,}21n}$; $\beta = P(X$ verlangt $k \leq \mu_1 - 1{,}282\sigma_1$.
b)
$0{,}5n + 0{,}8225\sqrt{n} \leq 0{,}7n - 1{,}282\sqrt{0{,}21n} \Leftrightarrow 0{,}2\sqrt{n} \geq 0{,}8225 + 0{,}5875 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 7{,}050 \Rightarrow n \geq 49{,}7$, also etwa 50.
c) $n = 53$: $P_{0{,}5}(X \geq 33) \approx 0{,}0492 \leq 0{,}05$ und $P_{0{,}5}(X \geq 32) \approx 0{,}0845 > 0{,}05$;
$\beta = P_{0{,}7}(X \leq 32) \approx 0{,}0862 \leq 0{,}1$. Für $n = 50$ bis 52 gilt dagegen $\beta > 0{,}1$ (z. B. $n = 52$: $\beta \approx 0{,}1202$).
d) Die Binomialverteilung ist diskret: Der Ablehnungsbereich kann nur in ganzen Schritten wachsen, und α^* liegt meist deutlich unter $5\,\%$. Dadurch wird β etwas größer als bei der stetigen Näherung.