Lösungen zur Klassenarbeit - Grenzwerte und Asymptoten

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Bei a) wird die höchste Potenz in Zähler und Nenner ausgeklammert; der Grenzwert ist der Quotient der Leitkoeffizienten (zwei BE). Bei b) entscheidet die e-Funktion, weil sie schneller fällt als jede Potenz wächst (eine BE). Bei c) wird der Zähler faktorisiert und gekürzt, danach setzt man ein (zwei BE).

a) Kürzen mit x^2: $\frac{3-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x^2}} \to 3$. (2 BE)
b) 0, die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz. (1 BE)
c) $\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 \to 6$ (hebbare Lücke). (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 2 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Definitionsmenge schließt die Nullstelle des Nenners aus; dort liegt die senkrechte Asymptote (zwei BE). Die waagerechte Asymptote ergibt sich aus dem Gradvergleich als Quotient der Leitkoeffizienten (eine BE). Für das Verhalten an der Polstelle untersucht man die Vorzeichen von Zähler und Nenner links und rechts (zwei BE).

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; Zähler bei $x = 1$ gleich $3 \neq 0$: senkrechte Asymptote $x = 1$. (2 BE)
b) Gleicher Grad: $y = 2$. (1 BE)
c) Von links ist der Nenner negativ, der Zähler positiv: $f \to -\infty$; von rechts $f \to +\infty$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Zerlegt man den Bruch in eine Summe, erkennt man direkt die schiefe Asymptote, denn der Rest geht gegen null (eine BE). Für die Extrempunkte setzt man die gegebene Ableitung null, bestimmt beide Lösungen und prüft ihre Art mit dem Vorzeichenwechsel oder der zweiten Ableitung; dann werden die Funktionswerte berechnet (drei BE).

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$: Asymptote $y = x$. (1 BE)
b) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Bei $x = -1$: Vorzeichenwechsel $+ \to -$, Hochpunkt $(-1|-2)$; bei $x = 1$: $- \to +$, Tiefpunkt $(1|2)$. (3 BE)

Lösung zu Aufgabe 4 (3 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: An der Nahtstelle werden linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert mit den jeweiligen Termen berechnet. Stetigkeit verlangt, dass beide Grenzwerte gleich dem Funktionswert sind; daraus entsteht eine lineare

Gleichung für den Parameter. Für die Grenzwerte gibt es zwei, für das Lösen und den Antwortsatz eine Bewertungseinheit. Häufiger Fehler ist, nur einen der beiden einseitigen Grenzwerte zu berechnen. Zur Kontrolle setzt man den gefundenen Parameter ein und prüft, dass beide Terme an der Nahtstelle denselben Wert liefern.

Links: $1 + a$, rechts: 5. Gleichsetzen: $a = 4$. (3 BE)

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Für $t \to \infty$ geht der Exponentialterm gegen null, die Geschwindigkeit nähert sich der Endgeschwindigkeit (eine BE). Für $90\,\%$ davon setzt man die Funktion gleich dem entsprechenden Wert, isoliert den Exponentialterm und logarithmiert; ein Antwortsatz mit Einheit schließt ab (zwei BE). Zwischenschritt: $1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0{,}9 \Rightarrow \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0{,}1 \Rightarrow t = 5 \ln 10 \approx 11{,}5$ s; die Endgeschwindigkeit von 50 m/s wird nie ganz erreicht.

a) $v(t) \to 50$ m/s. (1 BE)
b) $\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0{,}1 \Rightarrow t = 5 \ln 10 \approx 11{,}5$ s. (2 BE)