Lernzettel - Grenzwerte und Asymptoten

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Einstieg: Wohin strebt die Konzentration?

Nach der Einnahme eines Medikaments steigt die Wirkstoffkonzentration im Blut zunächst an, erreicht ein Maximum und sinkt dann wieder. Die Ärztin interessiert sich nicht nur für den Höchstwert, sondern auch dafür, wohin der Wert langfristig strebt: Geht die Konzentration auf null zurück, oder bleibt ein Rest im Körper? Mathematisch ist das die Frage nach dem Grenzwert für $t \to \infty$. Ähnliche Fragen stellen sich bei der Endgeschwindigkeit eines Fallschirmspringers, bei den Stückkosten einer immer größeren Produktion oder bei der Sättigung einer Population.

In diesem Kapitel untersuchen wir das Verhalten von Funktionen im Unendlichen und in der Nähe von Definitionslücken. Sie lernen, waagerechte, schiefe und senkrechte Asymptoten zu bestimmen, Polstellen von hebbaren Lücken zu unterscheiden und Grenzwerte mit der e-Funktion zu berechnen.

Verhalten im Unendlichen

Definition: waagerechte Asymptote

Wie verhält sich der Funktionswert $f(x)$, wenn x immer größer ($x \to \infty$) oder immer kleiner ($x \to -\infty$) wird? Nähert sich $f(x)$ einer Zahl g, schreibt man $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$; die Gerade $y = g$ ist dann eine **waagerechte Asymptote**. Wächst $f(x)$ über alle Grenzen, schreibt man $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (*bestimmte Divergenz*). Einfache Grenzwerte: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x} = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$.

Bei ganzrationalen Funktionen entscheidet der Summand mit der höchsten Potenz: $f(x) = x^3 - 2x$ geht für $x \to \infty$ gegen ∞ und für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$. Zur Begründung klammert man die höchste Potenz aus: $x^3(1 - \frac{2}{x^2})$, und der Klammerterm geht gegen 1.

Gebrochenrationale Funktionen

Für $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $\deg p = m$ und $\deg q = n$ gilt für $x \to \pm\infty$:

- m: $f(x) \to 0$, waagerechte Asymptote $y = 0$.
- $m = n$: $f(x) \to \frac{a_m}{b_n}$ (Quotient der Leitkoeffizienten), waagerechte Asymptote.
- $m = n + 1$: **schiefe Asymptote**, die man durch Polynomdivision erhält.
- $m > n + 1$: Der Graph geht gegen $\pm\infty$, es gibt keine lineare Asymptote.

Beispiel 1

$f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2-4}$. Kürzen mit x^2: $\frac{3+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} \to 3$. Waagerechte Asymptote $y = 3$.

Beispiel 2: schiefe Asymptote

$f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$. Polynomdivision: $x^2 + 1 = (x+2)(x-2) + 5$, also $f(x) = x - 2 + \frac{5}{x+2}$. Der Bruch geht gegen null, daher ist $y = x - 2$ schiefe Asymptote.

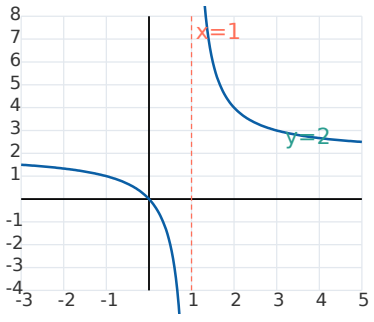
Satz: Verhalten im Unendlichen bei gebrochenrationalen Funktionen

Für $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ mit $\operatorname{grad} p = m$, $\operatorname{grad} q = n$ gilt: Bei m ist die x-Achse waagerechte Asymptote; bei $m = n$ ist $y = \dfrac{a_m}{b_n}$ waagerechte Asymptote; bei $m = n + 1$ gibt es eine schräge Asymptote; bei $m > n + 1$ wächst f betragsmäßig unbegrenzt.

Polstellen und senkrechte Asymptoten

Definition: Polstelle

Hat der Nenner an der Stelle x_0 eine Nullstelle, der Zähler aber nicht, liegt eine **Polstelle** vor; $x = x_0$ ist **senkrechte Asymptote**. Das Verhalten links und rechts von x_0 bestimmt man über das Vorzeichen: Bei $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ist der Zähler bei $x \to 2$ etwa $3 > 0$; der Nenner ist für $x \to 2^+$ positiv und für $x \to 2^-$ negativ. Also $f(x) \to +\infty$ von rechts und $f(x) \to -\infty$ von links (Pol *mit* Vorzeichenwechsel). Bei $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ ist der Nenner immer positiv, also $f(x) \to +\infty$ von beiden Seiten (Pol *ohne* Vorzeichenwechsel).



Satz: Polstelle

Ist $q(x_0) = 0$ und $p(x_0) \neq 0$, so hat f bei x_0 eine **Polstelle** mit der senkrechten Asymptote $x = x_0$. Gilt $p(x_0) = q(x_0) = 0$, prüfen Sie, ob der Linearfaktor $(x - x_0)$ sich kürzen lässt; dann ist die Lücke hebbar.

Hebbare Definitionslücken

Definition: hebbar

Sind bei x_0 sowohl Zähler als auch Nenner null, kann man oft kürzen: $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$ für $x\neq 1$. Der Graph ist die Gerade $y=x+1$ mit einem „Loch“ bei $x=1$; der Grenzwert dort ist $\lim_{x\to 1} f(x)=2$. Man nennt die Lücke **hebbar**, weil man f durch $f(1)=2$ stetig fortsetzen kann.

Grenzwerte mit der e-Funktion

Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{\mathrm{e}^x}=0$, also $\lim_{x\to\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}=0$. Für $x\to-\infty$ gilt dagegen $\mathrm{e}^x\to 0$, und $x\,\mathrm{e}^x\to 0$. Ein weiterer wichtiger Grenzwert ist $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$; er entspricht $(\mathrm{e}^x)'=1$ an der Stelle 0. Bei Scharen wie $f(x)=2-\mathrm{e}^{-x}$ liest man die Asymptote $y=2$ direkt ab, weil $\mathrm{e}^{-x}\to 0$.

Stetigkeit

Definition: stetig

Eine Funktion ist an der Stelle x_0 **stetig**, wenn $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ gilt; anschaulich lässt sich der Graph „ohne Absetzen“ zeichnen. Bei abschnittsweise definierten Funktionen setzt man an der Nahtstelle linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert gleich. Beispiel: $f(x)=x^2$ für $x\le 2$ und $f(x)=ax-2$ für $x>2$. Stetigkeit verlangt $4=2a-2$, also $a=3$.

Beispiel 4: zur Kurvendiskussion

Beispiel 3

Gegeben ist $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$. Nullstellen: Zähler null, also $x=\pm 2$. Polstellen: Nenner null, also $x=\pm 1$; der Zähler ist dort $-3\neq 0$. Die senkrechten Asymptoten sind $x=1$ und $x=-1$. Waagerechte Asymptote: Zähler- und Nennergrad sind gleich, die Leitkoeffizienten sind 1 und 1, also $y=1$. Der Graph schneidet die Asymptote nicht, denn $f(x)=1$ führt auf $-4=-1$, einen Widerspruch. Aus diesen Angaben und einer Wertetabelle (zum Beispiel $f(0)=4$) lässt sich der Graph in drei Teilen skizzieren: links von -1, zwischen -1 und 1, und rechts von 1.

Vorgehen bei Aufgaben zum Verhalten im Unendlichen

So gehst du vor

1. Höchste Potenz im Zähler und Nenner ausklammern und kürzen.
2. Terme der Form $\frac{1}{x^k}$ und e^{-x} gehen gegen null.
3. Ergebnis als Grenzwert notieren und Asymptote angeben, mit Gleichung.
4. Für senkrechte Asymptoten: Nenner null setzen und Zähler prüfen; Vorzeichen links und rechts bestimmen.

Grenzwertsätze und Rechenregeln

Existieren die Grenzwerte $\lim f(x) = a$ und $\lim g(x) = b$, dann gelten die Rechenregeln $\lim(f \pm g) = a \pm b$, $\lim(f \cdot g) = a \cdot b$ und $\lim \frac{f}{g} = \frac{a}{b}$ für $b \neq 0$. Problematisch sind Fälle wie $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\infty - \infty$; sie sind *unbestimmte Ausdrücke* und liefern, je nach Funktion, ganz verschiedene Ergebnisse. Erst durch Umformen (Ausklammern der höchsten Potenz, Kürzen, Erweitern) wird der Grenzwert sichtbar. Wichtig ist außerdem die Unterscheidung: Ein uneigentlicher Grenzwert $\lim f(x) = \infty$ bedeutet, dass $f(x)$ über jede Schranke wächst; eine Asymptote gibt es in diesem Fall nicht.

Beispiel 5

Bestimmen Sie $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 - x}{2x^3 + 5x^2}$ und $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$.

Im ersten Fall klammern Sie x^3 aus: $\frac{4 - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{5}{x}} \to \frac{4}{2} = 2$. Im zweiten Fall liegt die Form $\infty - \infty$ vor; Sie erweitern mit dem Konjugierten: $\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \to \frac{1}{2}$. Die Differenz zweier unbeschränkt wachsender Terme strebt also gegen $\frac{1}{2}$.

Senkrechte Asymptoten und das Vorzeichen

An einer Polstelle x_0 möchte man wissen, ob die Funktionswerte gegen $+\infty$ oder $-\infty$ laufen, und zwar von links und von rechts getrennt. Dazu bestimmen Sie das Vorzeichen von Zähler und Nenner in der Nähe der Polstelle. Hat der Nenner an der Polstelle eine *einfache* Nullstelle (Faktor $x - x_0$), wechselt der Nenner das Vorzeichen, und die Funktion geht auf den beiden Seiten gegen unterschiedliche Unendlichkeiten. Ist die Nullstelle *doppelt* (Faktor $(x - x_0)^2$), bleibt der Nenner positiv, und die Funktionswerte laufen auf beiden Seiten in dieselbe Richtung; man spricht von einer Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

Beispiel 6

Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x) = \dfrac{x + 1}{(x - 2)^2}$ an der Stelle $x = 2$.

Der Zähler ist bei $x = 2$ gleich $3 > 0$. Der Nenner $(x - 2)^2$ ist für alle $x \neq 2$ positiv und strebt gegen 0. Deshalb gilt $f(x) \to +\infty$ sowohl für $x \to 2^-$ als auch für $x \to 2^+$; die

Polstelle hat keinen Vorzeichenwechsel. Bei $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ dagegen wäre $g(x) \to -\infty$ von links und $+\infty$ von rechts.

Asymptoten bei Exponential- und Logarithmusfunktionen

Auch Funktionen mit e^x und $\ln x$ besitzen Asymptoten. Die Funktion $f(x) = a + b\,\mathrm{e}^{-kx}$ mit $k > 0$ hat für $x \to \infty$ die waagerechte Asymptote $y = a$. Der Logarithmus $\ln x$ hat bei $x \to 0^+$ den uneigentlichen Grenzwert $-\infty$, also die senkrechte Asymptote $x = 0$. Für $x \to \infty$ wächst $\ln x$ über alle Grenzen, aber langsamer als jede Wurzel. Bei Produkten wie $x\,\mathrm{e}^{-x}$ oder $x \ln x$ hilft die Faustregel, dass die Exponentialfunktion jede Potenz und jede Potenz den Logarithmus „besiegt“.

Beispiel 7

Ein Enzym setzt einen Stoff mit der Reaktionsgeschwindigkeit $v(S) = \dfrac{10\,S}{2 + S}$ um (S in mmol/l). Bestimmen Sie die Sättigungsgeschwindigkeit und die Konzentration für $90\,\%$ davon.

Für $S \to \infty$ gilt $v(S) = \frac{10}{\frac{2}{S}+1} \to 10$. Die Gerade $y = 10$ ist waagerechte Asymptote: Das Enzym kann nicht schneller als 10 mmol pro Minute arbeiten. Aus $\frac{10S}{2+S} = 9$ folgt $10S = 18 + 9S$, also $S = 18$ mmol/l.

Stetigkeit und Ableitbarkeit an Nahtstellen

Abschnittsweise definierte Funktionen werden in Abituraufgaben gern auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit untersucht. Stetigkeit verlangt die Gleichheit der beiden einseitigen Grenzwerte mit dem Funktionswert, Differenzierbarkeit zusätzlich die Gleichheit der beiden einseitigen Ableitungen. Eine Funktion kann stetig, aber nicht differenzierbar sein, etwa $f(x) = |x|$ an der Stelle 0: Der Graph hat dort einen Knick.

Beispiel 8

Für welche Werte von a ist $f(x) = \mathrm{e}^x$ für x und $f(x) = ax + 1$ für $x \geq 0$ an der Stelle 0 stetig, und für welche differenzierbar?

Der linksseitige Grenzwert ist $\mathrm{e}^0 = 1$, der rechtsseitige und der Funktionswert sind $a \cdot 0 + 1 = 1$. Die Funktion ist also für jedes a stetig. Die linksseitige Ableitung ist $(\mathrm{e}^x)' = 1$ bei $x = 0$, die rechtsseitige ist a. Differenzierbar ist die Funktion deshalb nur für $a = 1$.

Wusstest du? Achilles und die Schildkröte

Der griechische Philosoph Zenon von Elea (5. Jahrhundert v. Chr.) behauptete, der schnelle Achilles könne eine Schildkröte mit Vorsprung nie einholen: Wenn er ihren Startpunkt erreicht, ist sie ein Stück weitergekrochen, und so fort. Die Lösung des Paradoxons ist ein Grenzwert: Die unendlich vielen Teilstrecken ergeben eine endliche

Summe, zum Beispiel $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2$. Erst im 19. Jahrhundert wurde der Grenzwertbegriff mathematisch sauber definiert.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Verhalten im Unendlichen: Existiert $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = g$, so ist $y = g$ waagerechte Asymptote; bei ganzrationalen Funktionen entscheidet der Summand mit der höchsten Potenz.
- Gebrochenrationale Funktionen: Zählergrad kleiner Nennergrad gibt $y = 0$, gleich gibt $y = \frac{a_n}{b_n}$, Zählergrad um 1 größer gibt eine schiefe Asymptote (Polynomdivision).
- Polstelle: Nenner null, Zähler ungleich null; senkrechte Asymptote $x = x_0$; das Vorzeichen links und rechts bestimmt man über Zähler- und Nennervorzeichen.
- Hebbare Lücke: Zähler und Nenner null, der Linearfaktor lässt sich kürzen; der Graph hat ein Loch, der Grenzwert existiert.
- Grenzwerte mit e^x: $x^n \mathrm{e}^{-x} \to 0$ für $x \to \infty$, $x\,\mathrm{e}^x \to 0$ für $x \to -\infty$, $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.
- Stetigkeit: linksseitiger Grenzwert, rechtsseitiger Grenzwert und Funktionswert stimmen überein; bei abschnittsweisen Funktionen an der Nahtstelle gleichsetzen.
- Vorgehen: Zuerst kürzen und faktorisieren, dann Grenzwerte bilden; nie $\frac{\infty}{\infty}$ direkt als 1 notieren.
- Asymptoten werden immer mit Gleichung angegeben: $y = \ldots$ (waagerecht oder schief) und $x = \ldots$ (senkrecht).

Achtung: Typische Fehler

- Eine Polstelle mit einer hebbaren Lücke verwechseln (Zähler prüfen!).
- Beim Verhalten im Unendlichen $\frac{\infty}{\infty}$ als 1 schreiben; man muss zuerst kürzen.
- Vergessen, dass $x \to -\infty$ ein anderes Ergebnis liefern kann als $x \to \infty$ (z. B. bei e^x).
- Die schiefe Asymptote ohne Polynomdivision „erraten“.

Ottos Tipp: Setze große Zahlen wie $x = 1000$ in die Funktion ein, um deinen Grenzwert zu überprüfen. Wenn der Taschenrechner etwas anderes zeigt, hast du dich vertan!

Ottos Tipp

Bevor Sie Grenzwerte berechnen, kürzen Sie, soweit möglich. Danach ist sofort zu sehen, ob ein Pol oder nur eine hebbare Lücke vorliegt.