Arbeitsblatt - Grenzwerte und Asymptoten

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Verhalten ganzrationaler Funktionen

Bestimmen Sie das Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$. Klammern Sie dazu die höchste Potenz aus.

a) $f(x) = x^3 - 2x$
b) $f(x) = -x^4 + 3x^2$
c) $f(x) = 2x^5 - x^3 + 7$
d) $f(x) = 5 - x^2$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Waagerechte Asymptoten

Bestimmen Sie den Grenzwert für $x \to \pm\infty$ und geben Sie die Gleichung der waagerechten Asymptote an (falls vorhanden).

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 - 4}$
b) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 1}$
c) $f(x) = \dfrac{4x^3 - x}{2x^3 + 5x^2}$
d) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Schiefe Asymptoten

Bestimmen Sie die schiefe Asymptote mit Polynomdivision.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 2}$
b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{x - 1}$
c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Polstellen und ihr Vorzeichen

Bestimmen Sie die Polstellen und das Verhalten links und rechts der Polstelle.

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-1}$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Hebbare Lücken

Prüfen Sie, ob bei der angegebenen Stelle eine Polstelle oder eine hebbare Lücke vorliegt, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ bei $x = 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ bei $x = 3$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ bei $x = 2$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Grenzwerte mit der e-Funktion

Bestimmen Sie die Grenzwerte.

a) $\lim_{x\to\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x}$

b) $\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{x}$

c) $\lim_{x\to\infty} (x+1)\mathrm{e}^{-x}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Stetigkeit abschnittsweiser Funktionen

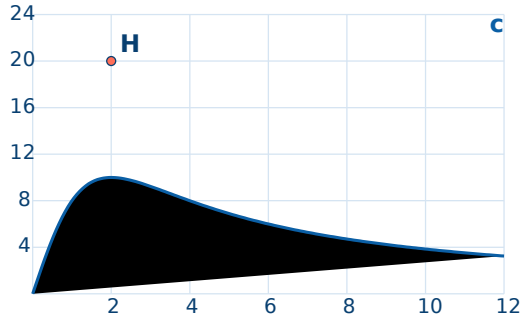
Gegeben ist $f(x) = x^2 + ax$ für x und $f(x) = 3x - 1$ für $x \geq 1$.

a) Bestimmen Sie den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle 1.
b) Bestimmen Sie a so, dass f stetig ist.
c) Prüfen Sie, ob f für dieses a auch differenzierbar ist.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Die Konzentration im Blut

Die Konzentration eines Medikaments (mg/l) nach der Einnahme wird durch $c(t) = \dfrac{40\,t}{t^2+4}$ (t in Stunden) beschrieben.



a) Bestimmen Sie den Grenzwert für $t \to \infty$ und deuten Sie ihn.
b) Zeigen Sie $c'(t) = \dfrac{40(4-t^2)}{(t^2+4)^2}$.
c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt und die Höhe der maximalen Konzentration.
d) Wann ist die Konzentration nach dem Maximum auf 5 mg/l gesunken?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Stückkosten einer Produktion

Die Gesamtkosten eines Betriebs betragen $K(x) = 2x + 50$ (in Euro, x Stück). Die Stückkosten sind $k(x) = \dfrac{K(x)}{x}$.

a) Stellen Sie $k(x)$ als Summe dar.
b) Bestimmen Sie den Grenzwert für $x \to \infty$ und deuten Sie ihn.
c) Bei welcher Stückzahl liegen die Stückkosten höchstens *2{,}50\,€*?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Logistisches Wachstum

Die Population einer Hirschart in einem Naturpark wird durch $N(t) = \dfrac{1000}{1 + 9\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$ (t in Jahren) beschrieben.

a) Wie groß ist die Anfangspopulation?
b) Bestimmen Sie die Sättigungsgrenze (Grenzwert für $t \to \infty$) und die Gleichung der Asymptote.
c) Wann sind 900 Tiere erreicht?
d) Begründen Sie, dass N streng monoton wächst.

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Der Fallschirmspringer

Die Geschwindigkeit eines Fallschirmspringers nach dem Öffnen des Schirms ist $v(t) = 50\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)$ (in m/s, t in Sekunden).

a) Bestimmen Sie die Endgeschwindigkeit und die Gleichung der Asymptote.
b) Wann hat der Springer $90\,\%$ der Endgeschwindigkeit erreicht?
c) Berechnen Sie die Beschleunigung $v'(t)$ und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Durchschnittskosten mit schiefer Asymptote

Die Stückkosten eines Betriebs sind $k(x) = 0{,}5x + 10 + \dfrac{20}{x}$ (in Euro, $x > 0$ Stück).

a) Bestimmen Sie die schiefe Asymptote.
b) Deuten Sie die Asymptote und den Term $\frac{20}{x}$.
c) Bestimmen Sie das Minimum der Stückkosten (Ableitung $k'(x) = 0{,}5 - \frac{20}{x^2}$).

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Die Beleuchtungsstärke

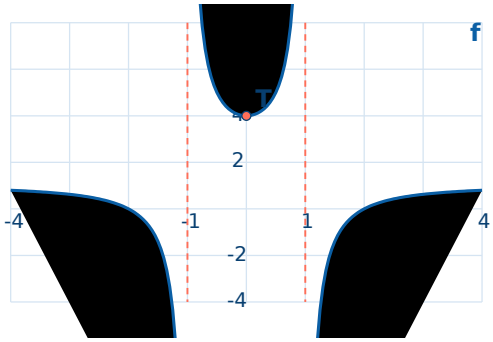
Die Beleuchtungsstärke einer Lampe im Abstand d (in m) ist $E(d) = \dfrac{100}{d^2}$ (in Lux).

a) Wie verhält sich E für $d \to 0^+$ und $d \to \infty$?
b) Geben Sie die Asymptoten an.
c) Bei welchem Abstand beträgt die Stärke 1 Lux?
d) Um welchen Faktor sinkt E, wenn man den Abstand verdreifacht?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Vollständige Untersuchung einer gebrochenrationalen Funktion

Gegeben ist $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ (Abbildung).

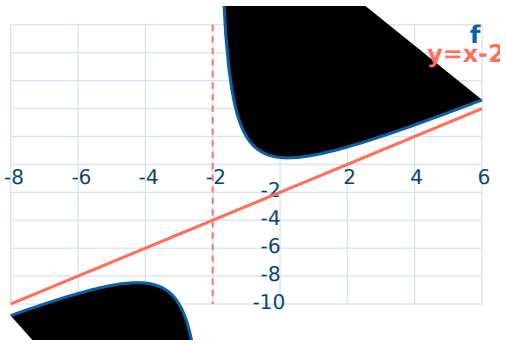


a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge, Symmetrie und Nullstellen.
b) Bestimmen Sie die senkrechten Asymptoten und das Verhalten an den Polstellen.
c) Bestimmen Sie die waagerechte Asymptote.
d) Zeigen Sie $f'(x) = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$ und bestimmen Sie das Extremum.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Schiefe Asymptote und Extremwerte

Gegeben ist $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.



a) Bestimmen Sie die senkrechte und die schiefe Asymptote.
b) Zeigen Sie $f'(x) = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$.
c) Bestimmen Sie die Extremstellen.
d) Berechnen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Eine Funktionenschar

Gegeben ist $f_a(x) = \dfrac{x^2-a}{x^2-1}$ mit $a > 0$, $a \neq 1$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen in Abhängigkeit von a.
b) Bestimmen Sie die Asymptoten (unabhängig von a).
c) Was passiert im Fall $a = 1$?
d) Für welches a hat der Graph den y-Achsenabschnitt 3?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Hebbare Lücke und Stetigkeit

Gegeben ist $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ für $x \neq 2$ und $f(x) = a$ für $x = 2$.

a) Vereinfachen Sie den Term für $x \neq 2$.
b) Bestimmen Sie a so, dass f stetig ist.
c) Skizzieren Sie den Graphen und beschreiben Sie, was für $a \neq 4$ passieren würde.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Flächen und Grenzwerte

Der Graph von $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ schließt mit der x-Achse über $[1; b]$ eine Fläche ein ($b > 1$).

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt $A(b)$.
b) Bestimmen Sie $\lim_{b \to \infty} A(b)$ und deuten Sie das Ergebnis.
c) Für welches b beträgt die Fläche $3{,}8$ FE?
d) Vergleichen Sie mit der Fläche unter $g(x) = \frac{4}{x}$ über $[1; b]$.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Wahr oder falsch?

Entscheiden Sie und begründen Sie (bei „falsch“ mit Gegenbeispiel).

a) Jede gebrochenrationale Funktion hat eine waagerechte Asymptote.
b) Hat f eine Polstelle bei x_0, so gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.
c) Der Graph kann seine waagerechte Asymptote schneiden.
d) Aus $\lim f(x) = 0$ folgt $f(x) \neq 0$ für alle x.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Die Enzymreaktion

Die Reaktionsgeschwindigkeit eines Enzyms hängt von der Substratkonzentration ab: $v(S) = \dfrac{10\,S}{2 + S}$ (S in mmol/l, v in mmol/min).

a) Bestimmen Sie die waagerechte Asymptote und deuten Sie sie.
b) Bei welcher Konzentration wird die halbe Sättigungsgeschwindigkeit erreicht?
c) Bei welcher Konzentration werden $90\,\%$ erreicht?
d) Zeigen Sie $v'(S) = \frac{20}{(2+S)^2} > 0$ und deuten Sie.