Lösungen - Grenzwerte und Asymptoten

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Man klammert die höchste Potenz von x aus. Die Klammer strebt gegen eine Konstante, also bestimmt der Summand mit dem höchsten Exponenten das Verhalten. Grad und Vorzeichen des Leitkoeffizienten entscheiden über $+\infty$ oder $-\infty$.

a) $x^3\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$: $f \to \infty$ für $x \to \infty$, $f \to -\infty$ für $x \to -\infty$.
b) $-x^4\left(1-\frac{3}{x^2}\right)$: $f \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$.
c) $f \to \infty$ für $x \to \infty$, $f \to -\infty$ für $x \to -\infty$ (ungerader Grad, positiver Leitkoeffizient).
d) $f \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Bei gebrochenrationalen Funktionen vergleicht man die Grade von Zähler und Nenner. Ist der Zählergrad kleiner, ist die Asymptote $y = 0$; sind die Grade gleich, ist sie der Quotient der Leitkoeffizienten. Ist der Zählergrad größer, gibt es keine waagerechte Asymptote.

a) Kürzen mit x^2: $\frac{3+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} \to 3$; Asymptote $y = 3$.
b) Zählergrad 1 < Nennergrad 2: Grenzwert 0; Asymptote $y = 0$.
c) Gleicher Grad: $\frac{4}{2} = 2$; Asymptote $y = 2$.
d) Zählergrad 3 > Nennergrad 2: $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$, es gibt keine waagerechte Asymptote; schiefe Asymptote $y = x$.

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg: Ist der Zählergrad um eins größer als der Nennergrad, liefert die Polynomdivision einen linearen Anteil und einen Rest. Der Rest geht für $x \to \pm\infty$ gegen null, der lineare Anteil ist die schiefe Asymptote.

a) $x^2 + 1 = (x+2)(x-2) + 5$, also $f(x) = x - 2 + \frac{5}{x+2}$; Asymptote $y = x - 2$.
b) $2x^2 - 3x + 4 = (x-1)(2x-1) + 3$, also $f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x-1}$; Asymptote $y = 2x - 1$.
c) Zähler $= (x-3)(x+2)$: $f(x) = x + 2$ für $x \neq 3$; der Graph ist die Gerade $y = x + 2$ mit einem Loch bei $x = 3$.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Polstellen sind Nullstellen des Nenners, die keine Nullstellen des Zählers sind. Das Verhalten links und rechts bestimmt man mit dem Vorzeichen von Zähler und Nenner in der Nähe; bei doppelter Nullstelle im Nenner gibt es keinen Vorzeichenwechsel.

a) Pol bei $x = 2$, Zähler $3 > 0$: von links $-\infty$, von rechts $+\infty$ (Vorzeichenwechsel).
b) Pol bei $x = 1$ ohne Vorzeichenwechsel: beidseitig $+\infty$.
c) Pole bei $x = \pm 1$. Bei $x = 1$: Zähler -2; links ist der Nenner negativ, also $f \to +\infty$, rechts positiv, also $f \to -\infty$. Bei $x = -1$: Zähler -4; links Nenner positiv: $-\infty$, rechts negativ: $+\infty$.

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Haben Zähler und Nenner dieselbe Nullstelle, kann man den gemeinsamen Faktor kürzen. Bleibt danach ein endlicher Wert, ist die Stelle eine hebbare Lücke, und der Grenzwert ist dieser Wert. Sonst liegt eine Polstelle vor.

a) Kürzen: $x + 1$; hebbare Lücke, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.
b) Kürzen: $x + 2$; hebbare Lücke, Grenzwert 5.
c) Kürzen: $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{x+2}{x-2}$; Polstelle bei $x = 2$ mit Vorzeichenwechsel.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Bei Produkten aus Potenz- und Exponentialfunktion entscheidet die e-Funktion, weil sie schneller wächst oder fällt als jede Potenz. Für Ausdrücke der Form „null durch null“ hilft die Definition der Ableitung an der Stelle null.

a) 0, da die e-Funktion schneller wächst als jede Potenz.
b) 0: Mit $u = -x \to \infty$ ist $x\mathrm{e}^{x} = -u\,\mathrm{e}^{-u} \to 0$.
c) 0.
d) 1 (Ableitung von e^{x} an der Stelle 0).

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: An der Nahtstelle werden die beiden Teilterme mit dem jeweils gültigen Grenzwert berechnet. Stetigkeit bedeutet, dass linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert mit dem Funktionswert übereinstimmen. Diese Bedingung liefert eine Gleichung für den Parameter.

a) Links: $1 + a$; rechts: $3 \cdot 1 - 1 = 2$.
b) $1 + a = 2 \Rightarrow a = 1$.
c) Linke Ableitung: $2x + a = 3$ bei $x = 1$; rechte Ableitung: 3. Die Ableitungen stimmen überein: f ist für $a = 1$ auch differenzierbar.

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: Für das Langzeitverhalten vergleicht man die Grade; die Konzentration geht gegen null. Das Maximum findet man mit der Quotientenregel. Für eine bestimmte Konzentration löst man eine quadratische Gleichung und deutet beide Lösungen.

a) Zählergrad 1 < Nennergrad 2: $c(t) \to 0$. Das Medikament wird vollständig abgebaut.
b) Quotientenregel: $c'(t) = \frac{40(t^2+4) - 40t \cdot 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{40(4-t^2)}{(t^2+4)^2}$.

c) $c'(t) = 0 \Rightarrow t = 2$ (Vorzeichenwechsel $+ \to -$); $c(2) = \frac{80}{8} = 10$ mg/l.
d) Aus $\frac{40t}{t^2+4} = 5$ folgt $t^2 - 8t + 4 = 0$, also $t = 4 \pm 2\sqrt{3}$; die spätere Lösung ist $t = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7{,}46$ h.

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Die Stückkosten werden in einen konstanten Anteil und einen Anteil, der mit der Menge abnimmt, zerlegt. Der Grenzwert für große Mengen zeigt die unterste mögliche Grenze der Stückkosten. Er wird im Sachzusammenhang gedeutet.

a) $k(x) = 2 + \frac{50}{x}$.
b) $k(x) \to 2$: Auf lange Sicht nähern sich die Stückkosten den variablen Kosten von 2\,€ pro Stück an, die Fixkosten verteilen sich auf immer mehr Stücke.
c) $2 + \frac{50}{x} \leq 2{,}5 \Rightarrow x \geq 100$ Stück.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Der Anfangsbestand ergibt sich für $t = 0$. Für $t \to \infty$ geht der Exponentialterm gegen null, die Population gegen die Kapazität. Zeitpunkte bestimmter Bestände findet man durch Umstellen und Logarithmieren.

a) $N(0) = \frac{1000}{10} = 100$ Tiere.
b) $\mathrm{e}^{-0{,}5t} \to 0$, also $N(t) \to 1000$; Asymptote $y = 1000$.
c) $1 + 9\mathrm{e}^{-0{,}5t} = \frac{10}{9} \Rightarrow \mathrm{e}^{-0{,}5t} = \frac{1}{81} \Rightarrow t = 2\ln 81 \approx 8{,}79$ Jahre.
d) Mit wachsendem t fällt $\mathrm{e}^{-0{,}5t}$, der Nenner wird kleiner, der Bruch also größer.

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: Für große Zeiten geht $\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ gegen null; die Geschwindigkeit nähert sich der Endgeschwindigkeit, der waagerechten Asymptote. Zeitpunkte für bestimmte Anteile der Endgeschwindigkeit erhält man durch Logarithmieren.

a) $v(t) \to 50$; Asymptote $y = 50$, das sind 180 km/h.
b) $1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0{,}9 \Rightarrow t = 5\ln 10 \approx 11{,}5$ s.
c) $v'(t) = 10\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} \to 0$: Die Beschleunigung geht gegen null, die Geschwindigkeit ist am Ende konstant.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Die schiefe Asymptote entsteht, wenn man den Term $\frac{20}{x}$ weglässt, der für große Mengen verschwindet. Die Deutung im Sachzusammenhang: Fixkosten pro Stück werden immer unbedeutender. Das Minimum der Stückkosten findet man mit der Ableitung.

a) $\frac{20}{x} \to 0$, also ist $y = 0{,}5x + 10$ die schiefe Asymptote.
b) Die Asymptote steht für die variablen Stückkosten; der Term $\frac{20}{x}$ sind die auf die Stückzahl verteilten Fixkosten, die mit wachsendem x verschwinden.

c) $k'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 40 \Rightarrow x = \sqrt{40} \approx 6{,}32$; *k\approx16{,}32\,€*.

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Für $d \to 0^+$ wird der Nenner sehr klein und der Wert sehr groß; für $d \to \infty$ geht er gegen null. Daraus ergeben sich eine senkrechte und eine waagerechte Asymptote. Abstände für bestimmte Beleuchtungsstärken folgen durch Auflösen.

a) $E \to \infty$ für $d \to 0^+$; $E \to 0$ für $d \to \infty$.
b) Senkrechte Asymptote $d = 0$, waagerechte Asymptote $E = 0$.
c) $\frac{100}{d^2} = 1 \Rightarrow d = 10$ m.
d) Auf $\frac{1}{9}$ des Wertes.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Eine vollständige Untersuchung folgt einem festen Schema: Definitionsmenge, Symmetrie, Nullstellen, Polstellen mit Vorzeichenverhalten, Asymptoten, Ableitung mit Extrempunkten und Skizze. Jeder Schritt wird nachvollziehbar notiert.

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. $f(-x) = f(x)$: achsensymmetrisch. Nullstellen $x = \pm 2$.
b) Zähler an den Polen -3. Bei $x = 1$: von links $+\infty$, von rechts $-\infty$; bei $x = -1$: von links $-\infty$, von rechts $+\infty$.
c) Gleicher Grad, Leitkoeffizienten 1 und 1: $y = 1$.
d) Quotientenregel: $f'(x) = \frac{2x(x^2-1)-(x^2-4)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$. f' für x, $f' > 0$ für $x > 0$: Tiefpunkt $T(0|4)$ (zwischen den Polen).

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Die Polstelle folgt aus der Nullstelle des Nenners, die schiefe Asymptote aus der Polynomdivision. Die Ableitung entsteht mit der Quotientenregel; ihre Nullstellen sind mögliche Extremstellen, deren Art man mit dem Vorzeichenwechsel prüft.

a) Polstelle bei $x = -2$ (Zähler $5 \neq 0$): $x = -2$. Polynomdivision: $f(x) = x - 2 + \frac{5}{x+2}$; schiefe Asymptote $y = x - 2$.
b) $f'(x) = \frac{2x(x+2)-(x^2+1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$
c) $x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{5} \approx 0{,}24$ und $-4{,}24$. Bei $x \approx -4{,}24$: $f \approx -6{,}47$ Hochpunkt (links vom Pol), bei $x \approx 0{,}24$: $f \approx 0{,}47$ Tiefpunkt.
d) $f(0) = \frac{1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: Die Nullstellen hängen von a ab, die Asymptoten nicht, weil der Nenner keinen Parameter enthält. Für den Sonderfall $a = 1$ kürzt sich der Term, und die Funktion wird konstant mit Lücken.

a) $x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$.
b) Senkrecht: $x = \pm 1$ (Zähler $1 - a \neq 0$); waagerecht: $y = 1$.
c) Für $a = 1$ ist $f_1(x) = 1$ für $x \neq \pm 1$: beide Lücken sind hebbar.
d) $f_a(0) = \frac{-a}{-1} = a = 3$.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: Für $x \neq 2$ kann man mit der dritten binomischen Formel kürzen. Stetigkeit verlangt, dass der Funktionswert bei 2 gleich dem Grenzwert des gekürzten Terms ist. So wird die Lücke geschlossen.

a) $\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$.
b) $\lim_{x \to 2}(x + 2) = 4$, also $a = 4$.
c) Der Graph ist die Gerade $y = x + 2$. Für $a \neq 4$ würde der Punkt $(2|a)$ nicht auf der Geraden liegen: f wäre unstetig, der Graph hätte ein Loch bei $(2|4)$ und einen einzelnen Punkt abseits.

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Die Fläche bis b wird mit einer Stammfunktion berechnet. Für $b \to \infty$ erhält man einen endlichen Grenzwert. Der Vergleich mit $\frac{4}{x}$ zeigt, dass ein Graph gegen null gehen kann, ohne dass die Fläche endlich ist.

a) $A(b) = \int_1^b 4x^{-2}\,dx = \left[-\frac{4}{x}\right]_1^b = 4 - \frac{4}{b}$.
b) $A(b) \to 4$: Die unendlich lange Fläche hat den endlichen Inhalt 4 FE.
c) $4 - \frac{4}{b} = 3{,}8 \Rightarrow \frac{4}{b} = 0{,}2 \Rightarrow b = 20$.
d) $\int_1^b \frac{4}{x}\,dx = 4\ln b \to \infty$: Die Fläche wächst über alle Grenzen, obwohl $\frac{4}{x} \to 0$ geht.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Jede Aussage wird entweder allgemein begründet oder mit einem Gegenbeispiel widerlegt. Dabei helfen bekannte Funktionen wie $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ oder ganzrationale Funktionen. Eine kurze Skizze macht die Begründung anschaulich.

a) Falsch: $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ hat nur eine schiefe Asymptote.
b) Falsch: Bei einem Vorzeichenwechsel geht f von links nach $-\infty$ und von rechts nach $+\infty$; der zweiseitige Grenzwert existiert nicht.
c) Wahr: z. B. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ schneidet $y = 0$ unendlich oft und $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ hat in $x = 0$ einen Schnittpunkt mit $y = 0$.
d) Falsch: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ hat $f(0) = 0$ und strebt gegen 0.

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: Die waagerechte Asymptote ergibt sich aus dem Gradvergleich und wird als maximale Reaktionsgeschwindigkeit gedeutet. Die halbe Maximalgeschwindigkeit liefert die Michaelis-Konstante. Die Ableitung zeigt, wie

schnell die Geschwindigkeit bei kleinen Konzentrationen zunimmt.

a) $v \to 10$: Das Enzym arbeitet höchstens mit 10 mmol/min (Sättigung).
b) $\frac{10S}{2+S} = 5 \Rightarrow 10S = 10 + 5S \Rightarrow S = 2$ mmol/l.
c) $\frac{10S}{2+S} = 9 \Rightarrow S = 18$ mmol/l.
d) $v'(S) = \frac{10(2+S)-10S}{(2+S)^2} = \frac{20}{(2+S)^2} > 0$: v wächst streng monoton, aber immer langsamer.