Lösungen zur Klassenarbeit - Geraden im Raum

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Der Richtungsvektor ist der Verbindungsvektor der beiden Punkte, der Stützvektor einer der Punkte (eine BE). Bei der Punktprobe bestimmt man r aus einer Zeile und prüft die beiden anderen (zwei BE). Für den Spurpunkt mit der x_1x_2-Ebene setzt man die dritte Koordinate null und berechnet den Punkt (zwei BE).

a) $g:\ \vec{x} = (1|0|1)^T + r \cdot (2|2|4)^T$. (1 BE)
b) $1 + 2r = 4 \Rightarrow r = 1{,}5$; $x_2 = 3$ ✓, $x_3 = 1 + 6 = 7$ ✓: $P \in g$. (2 BE)
c) $1 + 4r = 0 \Rightarrow r = -0{,}25$: $S(0{,}5|-0{,}5|0)$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 2 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Zuerst wird gezeigt, dass die Richtungsvektoren keine Vielfachen sind. Dann werden die Geraden gleichgesetzt; aus zwei Zeilen folgen r und s, die dritte Zeile dient als Probe (vier BE). Da sie erfüllt ist, schneiden sich die Geraden; den Schnittpunkt erhält man durch Einsetzen eines Parameters (eine BE).

a) Keine Vielfachen ($0 \neq k$). I: $r = 2$; II: $r = s \Rightarrow s = 2$; III: $r = 2$ ✓. Die Geraden schneiden sich. (4 BE)
b) $S(2|2|2)$. (1 BE)

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Für jeden Spurpunkt wird die passende Koordinate null gesetzt, der Parameter berechnet und in die Geradengleichung eingesetzt. Der Spurpunkt mit der x_1x_2-Ebene bringt zwei Bewertungseinheiten, die beiden anderen zusammen zwei. Fehlende Spurpunkte würden Parallelität zu einer Koordinatenebene anzeigen. Kontrolle: Alle drei Punkte erfüllen die Geradengleichung, etwa $(0|-1|-6)$ mit $r = -2$. Häufiger Fehler: bei S_{13} die erste statt der zweiten Koordinate null zu setzen.

a) $-2 + 2r = 0 \Rightarrow r = 1$: $S_{12}(3|2|0)$. (2 BE)
b) $1 + r = 0 \Rightarrow r = -1$: $S_{13}(1|0|-4)$; $2 + r = 0 \Rightarrow r = -2$: $S_{23}(0|-1|-6)$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Position nach fünf Sekunden erhält man durch Einsetzen von $t = 5$ (eine BE). Die Höhe ist die dritte Koordinate; aus ihr folgt der Zeitpunkt direkt (eine BE). Die Geschwindigkeit ist der Betrag des Verschiebungsvektors pro Sekunde, berechnet mit dem räumlichen Satz des

Pythagoras (zwei BE).

a) $(14|17|5)$. (1 BE)
b) $x_3 = t = 12$: nach 12 s. (1 BE)
c) $\sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} \approx 3{,}74\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 5 (2 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Windschiefe Geraden sind weder parallel, noch haben sie einen gemeinsamen Punkt; so etwas gibt es nur im Raum, nicht in der Ebene. Für die vollständige Definition gibt es eine Bewertungseinheit, für ein passendes Beispiel aus dem Alltag, etwa Straße und Brücke oder zwei Flugbahnen, eine weitere.

Zwei Geraden im Raum, die nicht parallel sind und sich nicht schneiden. Beispiel: Eine Straße und eine Bahnbrücke, die sie schräg überquert, oder zwei Flugbahnen in verschiedenen Höhen. (2 BE)