Lernzettel - Geraden im Raum

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Einstieg: Flugbahnen über dem Rhein-Main-Gebiet

Auf dem Radarschirm der Flugsicherung in Langen erscheinen die Flugzeuge als Punkte, die sich geradlinig bewegen. Ein Flugzeug im Reiseflug hält Höhe, Richtung und Geschwindigkeit konstant: Seine Position nach t Minuten erhält man, indem man zum Startpunkt t-mal denselben Verschiebungsvektor addiert. Das ist genau die Parameterform einer Geraden im Raum.

Für die Lotsen ist die entscheidende Frage: Kreuzen sich zwei Flugbahnen, verlaufen sie parallel, oder führen sie in verschiedenen Höhen aneinander vorbei? Anders als in der Ebene können sich zwei Geraden im Raum verfehlen, ohne parallel zu sein. In diesem Kapitel lernen Sie, Geraden aufzustellen, Punkte zu prüfen, Lagebeziehungen zu untersuchen und Schnittpunkte mit Ebenen des Koordinatensystems zu berechnen.

Vektoren im Raum

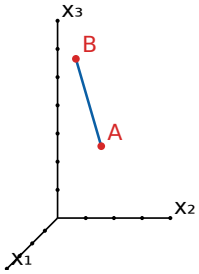
Definition: Ortsvektor

Im dreidimensionalen Koordinatensystem wird ein Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ durch seinen **Ortsvektor** beschrieben. Der Verbindungsvektor von A nach B ist . Seine Länge (der Betrag) ist . Der Mittelpunkt der Strecke AB hat den Ortsvektor $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Zwei Vektoren sind **kollinear** (parallel), wenn einer ein Vielfaches des anderen ist.

Parameterform einer Geraden

Eine Gerade g im Raum ist durch einen Punkt A und eine Richtung $\vec{u}$ festgelegt: $g:\ \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ mit $r \in \mathbb{R}$. Jeder Wert von r liefert genau einen Punkt der Geraden.

Verläuft die Gerade durch zwei Punkte A und B, nimmt man . Beispiel: Durch $A(1|2|3)$ und $B(3|2|7)$ geht . Für $r = 0$ erhält man A, für $r = 1$ den Punkt B, für 0 Punkte der Strecke AB. Für $r = \frac{1}{2}$ ergibt sich der Mittelpunkt $(2|2|5)$.



Satz: Parameterform

Die Gerade durch den Punkt P mit Richtungsvektor $\vec{u} \neq \vec{0}$ hat die Gleichung $g\colon \vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$. Durch zwei Punkte A, B gilt $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Punktprobe

Ob ein Punkt P auf g liegt, prüft man durch Einsetzen: $\vec{p} = \vec{a} + r\vec{u}$. Man bestimmt r aus einer Zeile und kontrolliert die beiden anderen. Beispiel: $P(5|2|11)$ liegt auf der Geraden oben, denn aus $1 + 2r = 5$ folgt $r = 2$, und $2 = 2$, $3 + 4 \cdot 2 = 11$ stimmen. Dagegen liegt $Q(2|3|5)$ nicht auf g, weil die zweite Zeile $2 = 3$ einen Widerspruch ergibt.

Lagebeziehungen zweier Geraden

Für $g:\ \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$ und $h:\ \vec{x} = \vec{b} + s\vec{v}$ gibt es vier Möglichkeiten:

So gehst du vor

1. Die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander: **parallel**. Liegt B auf g, sind die Geraden **identisch**, sonst **echt parallel**.
2. Sind sie keine Vielfachen, setzt man $\vec{a} + r\vec{u} = \vec{b} + s\vec{v}$ gleich. Das sind drei Gleichungen für zwei Unbekannte. Lösen Sie zwei Gleichungen nach r und s auf und prüfen Sie die dritte. Ist sie erfüllt: Die Geraden **schneiden** sich; den Schnittpunkt erhält man durch Einsetzen von r in g.
3. Ist die dritte Gleichung verletzt, sind die Geraden **windschief**: Sie schneiden sich nicht und sind nicht parallel.

Beispiel

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen. Gleichsetzen: I: $1 + r = 2s$, II: $2r = 1$, III: $2 = 1 + s$. Aus II folgt $r = \frac{1}{2}$, aus I dann $s = \frac{3}{4}$. Gleichung III verlangt $s = 1$ – Widerspruch. Die Geraden sind windschief.

Definition: Schneidendes Beispiel

Schneidendes Beispiel. und .

Gleichsetzen: I: $1+r=5-2s$, II: $2+r=3+s$, III: $3+r=5$. Aus III folgt $r=2$; aus II dann $s=1$; Gleichung I: $3=3$ ist erfüllt. Der Schnittpunkt ist $S(3|4|5)$. Beachten Sie, dass man immer die Gleichung mit den einfachsten Koeffizienten zuerst nutzt.

Satz: Lage zweier Geraden

Zwei Geraden sind **identisch**, **parallel** (Richtungsvektoren kollinear, kein gemeinsamer Punkt), **schneiden sich** in genau einem Punkt oder sind **windschief** (nicht parallel, kein Schnittpunkt).

Teilverhältnis und Punkte auf Strecken

Ein Punkt T teilt die Strecke im Verhältnis $m:n$ (von A aus), wenn

gilt. Für $m=n$ erhält man den Mittelpunkt. Für den Dreiecksschwerpunkt S mit den Ecken A, B, C gilt $\vec{s}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$. Solche Aufgaben tauchen im Abitur als Teilaufgabe zu Körpern wie Pyramiden oder Quadern auf.

Spurpunkte

Definition: Spurpunkte

Die **Spurpunkte** einer Geraden sind ihre Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen. Für die x_1x_2-Ebene setzt man $x_3=0$, für die x_1x_3-Ebene $x_2=0$, für die x_2x_3-Ebene $x_1=0$. Man löst die entsprechende Zeile nach r und setzt in g ein. Ist die Koordinate des Richtungsvektors null und die des Stützvektors ungleich null, hat die Gerade keinen Spurpunkt in dieser Ebene (sie verläuft parallel dazu).

Anwendung: Bewegungen im Raum

Zwei Flugobjekte bewegen sich auf Geraden $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}$ und $\vec{x}=\vec{b}+t\vec{v}$ mit derselben Zeit t. Schneiden sich die Bahnen, müssen die Parameter nicht gleich sein: Nur wenn $r=s$ im Schnittpunkt gilt, begegnen sich die Objekte tatsächlich. Dies prüft man nach der Berechnung des Schnittpunkts.

Weitere Beispiele

Beispiel 1: Gerade durch zwei Punkte

Stellen Sie die Gerade durch $A(1|2|3)$ und $B(3|2|7)$ auf und prüfen Sie, ob $C(5|2|11)$ darauf liegt.



; . Für C: $1+2t=5 \Rightarrow t=2$; $3+4t=11$ stimmt.

Also liegt C auf g.

Beispiel 2: Schnittpunkt



, **. Untersuchen Sie die Lage.**

Gleichsetzen: $r=2-s$, $r=s$, $r=s$. Aus $r=s$ und $r=2-s$ folgt $r=s=1$; die dritte Gleichung stimmt. Schnittpunkt $S(1|1|1)$.

Der Parameter als Zeit: Bewegungen beschreiben

In vielen Anwendungsaufgaben steht der Parameter für die Zeit. Dann ist der Stützvektor die Startposition und der Richtungsvektor die Verschiebung in einer Zeiteinheit. Die Länge $|\vec{u}|$ ist die Geschwindigkeit. Fragen nach dem Ort zu einem Zeitpunkt löst man durch Einsetzen, Fragen nach dem Zeitpunkt, zu dem eine Koordinate einen bestimmten Wert erreicht, durch eine einzige Gleichung. Achten Sie darauf, ob negative Zeiten im Sachzusammenhang sinnvoll sind: Meist ist nur $t \geq 0$ zugelassen, und die Gerade wird zum Strahl.

Beispiel 4: Die Vermessungsdrohne

Eine Drohne startet im Punkt $A(10|20|0)$ und fliegt geradlinig; pro Sekunde verschiebt sie sich um (Angaben in m). Wo ist sie nach 10 s, wann erreicht sie 30 m Höhe, und wie schnell fliegt sie?



. Für $t=10$: $(40|60|10)$. Die Höhe ist die dritte Koordinate:

$t=30$ liefert $x_3=30$, also nach 30 s im Punkt $(100|140|30)$. Die Geschwindigkeit ist $|\vec{u}|=\sqrt{9+16+1}=\sqrt{26}\approx 5{,}10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Begegnen sich zwei Objekte?

Schneiden sich zwei Bahnen, heißt das noch nicht, dass die Objekte zusammenstoßen. Sie müssten den Schnittpunkt zur selben Zeit erreichen. Deshalb verwendet man zwei verschiedene Parameter r und s, wenn man nach dem gemeinsamen Punkt der Bahnen

fragt, aber denselben Parameter t, wenn man prüfen will, ob sich die Objekte treffen. Den Abstand der Objekte zur Zeit t berechnet man als Betrag des Verbindungsvektors $|\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)|$; sein Minimum findet man mit der Differenzialrechnung.

Beispiel 5: Zwei Flugzeuge

Flugzeug 1: $\vec{x}_1(t) = (0|0|8) + t \cdot (8|6|0)$, Flugzeug 2: $\vec{x}_2(t) = (40|-30|10) + t \cdot (0|10|0)$ (km, t in Minuten). Schneiden sich die Bahnen?

Gleichsetzen mit r und s: Die dritte Zeile ergibt $8 = 10$, ein Widerspruch. Die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen; die Bahnen sind windschief. Flugzeug 1 überfliegt den Punkt $(40|30)$ bei $r = 5$, Flugzeug 2 bei $s = 6$: Sie liegen dort 2 km übereinander, zeitlich eine Minute versetzt.

Systematisch zur Lagebeziehung

Ein festes Prüfschema vermeidet Fehler. Zuerst vergleicht man nur die Richtungsvektoren: Sind sie Vielfache voneinander, kommen nur „identisch“ oder „echt parallel“ in Frage, und eine einzige Punktprobe entscheidet. Erst wenn die Richtungen verschieden sind, setzt man gleich und löst das Gleichungssystem. Wer gleich mit dem Gleichungssystem beginnt, erhält bei parallelen Geraden unendlich viele oder keine Lösungen und muss das Ergebnis erst mühsam deuten.

Beispiel 6: Raumdiagonalen eines Quaders

Ein Quader hat die Ecken $A(0|0|0)$, $B(6|0|0)$, $G(6|4|3)$ und $H(0|4|3)$. Schneiden sich die Raumdiagonalen AG und BH?

$AG:\ \vec{x} = r \cdot (6|4|3)$, $BH:\ \vec{x} = (6|0|0) + s \cdot (-6|4|3)$. Erste Zeile: $6r = 6 - 6s$, zweite Zeile: $4r = 4s \Rightarrow r = s$. Damit $12r = 6$, $r = \frac{1}{2}$. Dritte Zeile zur Probe: $1{,}5 = 1{,}5$. Schnittpunkt $M(3|2|1{,}5)$: Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig im Mittelpunkt des Quaders.

Wusstest du? Staffelung im Luftraum

Die Deutsche Flugsicherung überwacht täglich mehrere tausend Flüge. Zwei Flugzeuge müssen in der Regel mindestens fünf nautische Meilen (etwa $9{,}3$ km) seitlich oder $1\,000$ Fuß (etwa 300 m) in der Höhe voneinander entfernt sein. Computerprogramme berechnen dazu ständig die künftigen Positionen als Punkte auf Geraden und warnen, wenn der Abstand zu klein zu werden droht.

Geraden im Schrägbild zeichnen

Um eine Gerade im Schrägbild darzustellen, berechnet man zwei gut sichtbare Punkte, am besten Spurpunkte, und verbindet sie. Ein Spurpunkt mit der x_1x_2-Ebene liegt „auf dem Boden“ des Koordinatensystems und lässt sich leicht einzeichnen. Liegen beide Punkte zu nah beieinander, wählt man größere Parameterwerte. Bei der Kontrolle einer Rechnung ist

eine solche Skizze sehr hilfreich: Zwei Geraden, die im Bild parallel aussehen, können trotzdem windschief sein, weil das Schrägbild Tiefe nur andeutet. Entscheidend ist daher immer die Rechnung, die Skizze dient nur der Orientierung und der Plausibilitätsprüfung.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Parameterform $g:\ \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$: Stützvektor $\vec{a}$ (Ortsvektor eines Punktes der Geraden), Richtungsvektor $\vec{u} \neq \vec{0}$, Parameter $r \in \mathbb{R}$.
- Gerade durch A und B: ; die Strecke gehört zu $0 \leq r \leq 1$, der Mittelpunkt zu $r = \frac{1}{2}$.
- Punktprobe: Punkt gleichsetzen, r aus einer Zeile berechnen, in den anderen Zeilen prüfen; nur wenn alle Zeilen dasselbe r liefern, liegt der Punkt auf der Geraden.
- Lage zweier Geraden: Richtungsvektoren Vielfache $\Rightarrow$ identisch oder echt parallel (Punktprobe); sonst Gleichsetzen: eine Lösung $\Rightarrow$ Schnittpunkt, keine Lösung $\Rightarrow$ windschief.
- Gleichsetzen liefert drei Gleichungen für zwei Unbekannte r und s: zwei Gleichungen lösen, die dritte zur Probe verwenden.
- Spurpunkte: Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen; für S_{12} setzt man $x_3 = 0$, für S_{13} $x_2 = 0$, für S_{23} $x_1 = 0$.
- Bewegungen: Ist $r = t$ die Zeit, so beschreibt $\vec{u}$ die Verschiebung pro Zeiteinheit, $|\vec{u}|$ die Geschwindigkeit.
- Windschiefe Geraden gibt es nur im Raum: Sie sind weder parallel, noch schneiden sie sich (zum Beispiel zwei Flugbahnen in verschiedener Höhe).

Achtung: Typische Fehler

- Bei Geraden gleichen Parameter für beide Geraden verwenden (r und s müssen unterschiedlich benannt sein).
- Schnittpunkt behaupten, obwohl die dritte Gleichung nicht geprüft wurde.
- Richtungsvektor aus $\vec{b} - \vec{a}$ falsch herum bilden (Vorzeichen).
- Parallele Geraden mit schneidenden verwechseln: Richtungsvektoren zuerst prüfen.

Ottos Tipp: Schreibe die drei Gleichungen immer untereinander (I, II, III) und löse die einfachste zuerst. Die dritte dient als Kontrolle!

Ottos Tipp

Ein Schnittpunkt ist erst dann sicher, wenn alle drei Koordinatengleichungen stimmen. Prüfen Sie die dritte Zeile immer, auch wenn die ersten beiden gut aussehen.