Arbeitsblatt - Geraden im Raum

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Geradengleichungen aufstellen

Stellen Sie jeweils eine Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte in Parameterform auf.

a) $A(1|2|3)$ und $B(4|0|5)$
b) $C(0|0|0)$ und $D(2|-1|4)$
c) $P(2|2|0)$ und $Q(2|5|0)$; beschreiben Sie die besondere Lage dieser Geraden.
d) Geben Sie zu a) eine zweite, andere Gleichung derselben Geraden an.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Punktprobe



Gegeben ist die Gerade . Prüfen Sie, ob die Punkte auf g liegen.

a) $P(5|0|6)$
b) $Q(-1|3|-3)$
c) $R(3|1|4)$
d) Bestimmen Sie c so, dass $T(7|c|9)$ auf g liegt.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Punkte einer Geraden



Gegeben ist .

a) Geben Sie drei Punkte von g an.
b) Bestimmen Sie den Punkt von g, der in der x_1x_2-Ebene liegt.
c) Bestimmen Sie den Punkt von g mit $x_1 = 0$.
d) Liegt der Ursprung auf g? Begründen Sie.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Lagebeziehungen untersuchen

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden $g:\ \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$ und $h:\ \vec{x} = \vec{b} + s\vec{v}$. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) , , ,

b) , , ,

c) , , ,

d) , , ,

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Schnittpunkt berechnen

Gegeben sind und .

a) Zeigen Sie, dass die Richtungsvektoren keine Vielfachen sind.
b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf.
c) Lösen Sie es und bestimmen Sie den Schnittpunkt.
d) Machen Sie die Probe mit der dritten Gleichung.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Spurpunkte einer Geraden

Gegeben ist .

a) Berechnen Sie den Spurpunkt S_{12} mit der x_1x_2-Ebene.
b) Berechnen Sie die Spurpunkte S_{13} und S_{23}.
c) Zwischen welchen Spurpunkten verläuft die Gerade im ersten Oktanten (alle Koordinaten ≥ 0)?

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Strecken und Teilpunkte

Gegeben sind $A(2|-1|3)$ und $B(8|5|0)$.

a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M der Strecke .
b) Bestimmen Sie den Punkt T, der die Strecke im Verhältnis $1:2$ teilt (von A aus).
c) Zeigen Sie, dass $C(10|7|-1)$ auf der Geraden AB, aber nicht auf der Strecke liegt.
d) Berechnen Sie die Länge der Strecke .

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Die Vermessungsdrohne

Ein Vermessungsbüro in Freiburg setzt eine Drohne ein. Sie startet im Punkt $A(10|20|0)$ und bewegt sich pro Sekunde um den Vektor $\vec{u} = (3|4|1)^T$ (Angaben in m). Auf dem Gelände steht bei $(55|80|0)$ ein 4 m hohes Gartenhaus.

a) Geben Sie die Position nach t Sekunden an und berechnen Sie die Position nach 10 s.
b) Wann erreicht die Drohne die Flughöhe 30 m, und wo ist sie dann?
c) Überfliegt die Drohne das Gartenhaus? Wenn ja, in welchem Abstand zum Dach?
d) Berechnen Sie die Geschwindigkeit in m/s und km/h.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Begegnung am Himmel

Zwei Flugzeuge fliegen geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit (Angaben in km, t in Minuten nach 10:00 Uhr):
Flugzeug 1: $\vec{x}_1(t) = (0|0|8)^T + t \cdot (8|6|0)^T$,
Flugzeug 2: $\vec{x}_2(t) = (40|-30|10)^T + t \cdot (0|10|0)^T$.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten beider Flugzeuge in km/h.
b) Zeigen Sie, dass die Flugbahnen windschief sind.
c) An welcher Stelle überfliegen sich die Bahnen? Geben Sie die Höhendifferenz an.
d) Zu welchen Uhrzeiten sind die Flugzeuge dort?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Die Seilbahn im Allgäu

Eine Seilbahn führt geradlinig von der Talstation $T(200|100|750)$ zur Bergstation $B(1\,400|1\,000|1\,950)$ (Angaben in m, x_3 ist die Höhe über dem Meer).

a) Stellen Sie eine Gleichung der Seilgeraden auf.
b) Berechnen Sie die Länge des Seils und den Höhenunterschied.
c) Berechnen Sie die mittlere Steigung in Prozent (Höhenunterschied durch horizontale Entfernung).
d) In welchem Punkt erreicht die Gondel $1\,350$ m Höhe?
e) Eine Stütze steht bei einem Viertel der Strecke. Wo steht sie, und wie hoch ist sie, wenn das Gelände dort auf 980 m Höhe liegt?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Der Laserpointer

Im Physikraum ist an der Wand im Punkt $P(0|2|3)$ ein Laser befestigt. Sein Strahl hat die Richtung $\vec{u} = (4|1|-2)^T$ (Angaben in m). Der Boden ist die x_1x_2-Ebene.

a) Geben Sie eine Gleichung des Laserstrahls an.
b) Wo trifft der Strahl auf den Boden?
c) Wie lang ist der Strahl von der Wand bis zum Boden?
d) Auf dem Boden steht bei $(4|3)$ ein 1 m hoher Experimentiertisch. Wird er getroffen?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Der Schatten des Fahnenmasts

Auf dem Schulhof steht ein 8 m hoher Fahnenmast mit Fußpunkt $F(5|4|0)$. Die Sonnenstrahlen haben zu einem bestimmten Zeitpunkt die Richtung $\vec{s} = (-2|-1|-1)^T$ (Angaben in m).

a) Stellen Sie die Gerade durch die Mastspitze in Richtung der Sonnenstrahlen auf.
b) Bestimmen Sie die Schattenspitze auf dem Boden.
c) Berechnen Sie die Länge des Schattens.
d) Wie hoch steht die Sonne über dem Horizont? ($\tan\alpha = \frac{\text{Masthöhe}}{\text{Schattenlänge}}$)

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Der Tunneldurchstich

Ein Tunnel wird von zwei Seiten gleichzeitig vorgetrieben (Angaben in m). Trupp 1 startet im Portal $A(0|0|0)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}$, Trupp 2 im Portal $B(180|130|14)$ in Richtung $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass sich die beiden Vortriebsgeraden schneiden, und bestimmen Sie den Durchschlagspunkt.
b) Wie lang ist jeder der beiden Tunnelabschnitte?
c) Durch einen Messfehler arbeitet Trupp 2 in Richtung $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass sich die Trupps dann verfehlen.
d) Erklären Sie, warum Vermesser bei Tunneln besonders auf die Höhenrichtung achten müssen.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Raumdiagonalen im Quader

Ein quaderförmiger Container hat die Ecken $A(0|0|0)$, $B(6|0|0)$, $C(6|4|0)$, $D(0|4|0)$ und darüber E, F, G, H in der Höhe 3 (Angaben in m).

a) Geben Sie die Koordinaten von E, F, G, H an.
b) Stellen Sie Gleichungen der Raumdiagonalen AG und BH auf.
c) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Raumdiagonalen.
d) Berechnen Sie die Länge einer Raumdiagonalen. Passt ein $7{,}5$ m langes Rohr in den Container?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Mindestabstand in der Luft

Die Flugsicherung beobachtet zwei Flugzeuge in derselben Flughöhe (Angaben in km, t in Minuten):
$\vec{x}_1(t) = (0|0|9)^T + t \cdot (6|8|0)^T$, $\vec{x}_2(t) = (30|0|9)^T + t \cdot (0|10|0)^T$.
Vorgeschrieben ist ein Mindestabstand von 5 nautischen Meilen, also etwa $9{,}26$ km.

a) Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen schneiden, und bestimmen Sie den Schnittpunkt.
b) Zu welchen Zeitpunkten erreichen die Flugzeuge diesen Punkt? Kommt es zum Zusammenstoß?
c) Zeigen Sie: Der Abstand zur Zeit t ist $d(t) = \sqrt{(6t-30)^2 + 4t^2}$.
d) Bestimmen Sie den kleinsten Abstand und den Zeitpunkt.
e) Wird der Mindestabstand eingehalten? Beurteilen Sie die Situation.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Das Satteldach

Ein Haus hat einen rechteckigen Grundriss von 10 m $\times$ 8 m und ein Satteldach. Die Traufen liegen in 6 m Höhe, der First in 9 m Höhe genau über der Mitte. Koordinaten (in m): Traufpunkte $A(0|0|6)$, $B(10|0|6)$, $C(10|8|6)$, $D(0|8|6)$, Firstpunkte $F_1(0|4|9)$, $F_2(10|4|9)$.

a) Stellen Sie Gleichungen der Firstgeraden und der Traufgeraden AB auf und zeigen Sie, dass sie parallel sind.
b) Berechnen Sie die Länge eines Dachsparrens von A nach F_1 und den Inhalt der gesamten Dachfläche.
c) Untersuchen Sie die Lage der Dachkanten AF_1 und CF_2.
d) Eine Antenne soll auf dem First bei $x_1 = 7$ stehen. Geben Sie ihren Fußpunkt an.
e) Eine Solaranlage soll eine Dachhälfte ganz bedecken. Ein Modul ist $1{,}7$ m $\times$ 1 m groß. Wie viele Module passen höchstens auf eine Dachhälfte?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Tauchgang am Riff

Eine Taucherin springt vom Boot im Punkt $B(0|0|0)$ ins Wasser (Wasseroberfläche: $x_3 = 0$, Angaben in m) und taucht geradlinig in Richtung $\vec{u} = (2|1|-2)^T$ pro 10 Sekunden ab.

a) Wo ist sie nach 1 Minute?
b) Wann erreicht sie 20 m Tiefe, und welche Strecke hat sie dann zurückgelegt?
c) Ein Korallenriff beginnt im Punkt $K(30|15|-30)$. Liegt K auf ihrer Bahn?
d) Wegen des Druckausgleichs soll sie höchstens 18 m pro Minute tiefer tauchen. Hält sie sich daran?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Eine Geradenschar

Gegeben sind $g_a:\ \vec{x} = (1|0|0)^T + r \cdot (1|a|1)^T$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $h:\ \vec{x} = (0|1|2)^T + s \cdot (1|1|0)^T$.

a) Zeigen Sie, dass g_a und h für kein a parallel sind.
b) Bestimmen Sie a so, dass sich g_a und h schneiden, und berechnen Sie den Schnittpunkt.
c) Welche Lage haben g_a und h für alle anderen Werte von a?
d) Zeigen Sie, dass alle Geraden g_a durch den Punkt $(1|0|0)$ gehen und in der Ebene $x_1 - x_3 = 1$ liegen.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Die Seilrutsche im Kletterwald

In einem Kletterwald im Harz wird eine Seilrutsche über ein Tal gespannt. Sie beginnt auf einer Plattform im Punkt $S(0|0|40)$ und endet im Punkt $E(240|180|10)$ (Angaben in m, x_3 Höhe über dem Talboden). Im Tal steht bei $(120|90)$ eine 22 m hohe Fichte, bei $(200|150)$ ein 14 m hoher Hochsitz. Der Sicherheitsabstand nach unten soll mindestens 2 m betragen.

a) Stellen Sie eine Gleichung der Seilgeraden auf.
b) Berechnen Sie die Länge des Seils und das Gefälle in Prozent.
c) Wie hoch über dem Wipfel der Fichte verläuft das Seil? Ist der Sicherheitsabstand eingehalten?
d) Prüfen Sie ebenso den Hochsitz.
e) Ein Rutschender hängt $1{,}5$ m unter dem Seil. Was folgt daraus für Fichte und Hochsitz?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Kollinear oder nicht? (Knobelaufgabe)

Gegeben sind die Punkte $A(1|1|1)$, $B(2|3|t)$ und $C(4|7|7)$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie t so, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen.
b) Geben Sie für dieses t eine Gleichung der Geraden g an, deren Richtungsvektor die Länge 3 hat.
c) Bestimmen Sie alle Punkte von g, die von A den Abstand 6 haben.
d) Für $t = 1$ bilden A, B, C ein Dreieck. Zeigen Sie, dass die Seitenhalbierende durch A den Mittelpunkt M_a von trifft, und geben Sie den Schwerpunkt an.