Lösungen - Geraden im Raum

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Eine Gerade durch zwei Punkte erhält man, indem man einen Punkt als Stützvektor wählt und den Verbindungsvektor als Richtungsvektor nimmt. Der Verbindungsvektor ist „Spitze minus Fuß“. Weil Stützpunkt und Länge des Richtungsvektors frei wählbar sind, hat jede Gerade unendlich viele Gleichungen.



a) , also .

b) ; da C der Ursprung ist: .

c) : . Die Gerade liegt in der x_1x_2-Ebene und ist

parallel zur x_2-Achse.
d) Zum Beispiel mit Stützpunkt B und doppeltem Richtungsvektor:

.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Für die Punktprobe setzt man den Punkt mit der Geradengleichung gleich. Aus einer Zeile bestimmt man r und prüft, ob dieser Wert auch die anderen beiden Zeilen erfüllt. Nur wenn alle drei Zeilen dasselbe r liefern, liegt der Punkt auf der Geraden.

a) Erste Zeile: $1+2r=5 \Rightarrow r=2$. Zweite Zeile: $2-2=0$ ✓, dritte Zeile: $0+6=6$ ✓. P liegt auf g ($r=2$).
b) Erste Zeile: $1+2r=-1 \Rightarrow r=-1$. Zweite Zeile: $2+1=3$ ✓, dritte Zeile: -3 ✓. Q liegt auf g ($r=-1$).
c) Erste Zeile: $1+2r=3 \Rightarrow r=1$. Zweite Zeile: $2-1=1$ ✓, dritte Zeile: $0+3=3\neq 4$. R liegt nicht auf g.
d) Erste Zeile: $1+2r=7 \Rightarrow r=3$; dritte Zeile: $9=9$ ✓; zweite Zeile: $c=2-3=-1$.

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg: Punkte der Geraden erhält man durch Einsetzen beliebiger Parameterwerte. Für einen Punkt mit einer vorgegebenen Koordinate setzt man die passende Zeile gleich diesem Wert, bestimmt r und berechnet damit die übrigen

Koordinaten.

a) $r = 0$: $(2|-1|4)$; $r = 1$: $(3|1|2)$; $r = -1$: $(1|-3|6)$.
b) $x_3 = 0$: $4 - 2r = 0 \Rightarrow r = 2$; Punkt $(4|3|0)$.
c) $2 + r = 0 \Rightarrow r = -2$; Punkt $(0|-5|8)$.
d) Aus $2 + r = 0$ folgt $r = -2$, dann wäre $x_2 = -1 - 4 = -5 \neq 0$. Der Ursprung liegt nicht auf g.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Zuerst wird geprüft, ob die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind. Wenn ja, entscheidet eine Punktprobe zwischen identisch und echt parallel. Wenn nein, setzt man die Geraden gleich: Eine Lösung liefert den Schnittpunkt, ein Widerspruch bedeutet windschief.

a) $\vec{v} = -2\vec{u}$: parallel. Punktprobe mit $B(5|0|6)$: $1 + 2r = 5 \Rightarrow r = 2$, $2 - 2 = 0$ ✓, $6 = 6$ ✓. Die Geraden sind identisch.
b) $\vec{v} = 2\vec{u}$: parallel. Punktprobe mit $O(0|0|0)$ in g: $1 + r = 0 \Rightarrow r = -1$, dann $x_3 = 2 - 1 = 1 \neq 0$. Echt parallel.
c) Keine Vielfachen. Gleichsetzen: $1 + r = 3 \Rightarrow r = 2$; $1 = s$; dritte Zeile $r = 1 + s$: $2 = 2$ ✓. Schnittpunkt $S(3|1|2)$.
d) Keine Vielfachen. Gleichsetzen: $r = 1$ (erste Zeile), $r = s$ (zweite Zeile), dritte Zeile: $0 = 1$, Widerspruch. Die Geraden sind windschief.

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Nach der Prüfung der Richtungsvektoren wird das Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten aufgestellt. Zwei Gleichungen werden nach r und s gelöst, die dritte dient als Probe. Den Schnittpunkt erhält man durch Einsetzen eines Parameters.

a) Aus $2 = k \cdot 1$ folgt $k = 2$, aber $1 \neq 2 \cdot (-1)$. Keine Vielfachen.
b) I: $1 + r = 1 + 2s$; II: $2 - r = -1 + s$; III: $3 + 2r = 8 - s$.
c) Aus I: $r = 2s$. In II: $2 - 2s = -1 + s \Rightarrow s = 1$, $r = 2$. Schnittpunkt $S(3|0|7)$.
d) III: $3 + 2 \cdot 2 = 7$ und $8 - 1 = 7$ ✓.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Ein Spurpunkt liegt in einer Koordinatenebene, eine Koordinate ist dort also null. Man setzt die entsprechende Zeile gleich null, bestimmt r und berechnet den Punkt. Aus den Vorzeichenbedingungen aller Koordinaten erhält man den Abschnitt im ersten Oktanten.

a) $x_3 = 0$: $4 + 2r = 0 \Rightarrow r = -2$; $S_{12}(-1|5|0)$.
b) $x_2 = 0$: $3 - r = 0 \Rightarrow r = 3$; $S_{13}(4|0|10)$. $x_1 = 0$: $1 + r = 0 \Rightarrow r = -1$; $S_{23}(0|4|2)$.
c) Alle Koordinaten sind nichtnegativ für $-1 \leq r \leq 3$ (aus $x_1 \geq 0$: $r \geq -1$; $x_2 \geq 0$: $r \leq 3$; $x_3 \geq 0$: $r \geq -2$). Die Gerade verläuft im ersten Oktanten von $S_{23}(0|4|2)$ bis $S_{13}(4|0|10)$.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: Mittelpunkt und Teilpunkte erhält man mit Bruchteilen des Verbindungsvektors. Ein Punkt liegt auf der Strecke, wenn sein Parameter zwischen 0 und 1 liegt. Die Streckenlänge ist der Betrag des Verbindungsvektors.

a) $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$: $M(5|2|1{,}5)$.

b) : $T(4|1|2)$.

c) : erste Zeile $2 + 6r = 10 \Rightarrow r = \frac{4}{3}$; zweite $-1 + 8 = 7$ ✓, dritte $3 - 4 = -1$ ✓. Wegen $r > 1$ liegt C jenseits von B.

d) .

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: Der Parameter ist hier die Zeit in Sekunden. Positionen erhält man durch Einsetzen von t, Zeitpunkte durch Lösen einer Koordinatengleichung. Für das Überfliegen des Gartenhauses müssen die ersten beiden Koordinaten übereinstimmen; die Geschwindigkeit ist der Betrag des Richtungsvektors.

a) $\vec{x}(t) = (10|20|0)^T + t \cdot (3|4|1)^T$; $t = 10$: $(40|60|10)$.
b) $x_3 = t = 30$: nach 30 s im Punkt $(100|140|30)$.
c) $10 + 3t = 55 \Rightarrow t = 15$; zweite Koordinate $20 + 60 = 80$ ✓. Die Drohne ist dort in 15 m Höhe, also 11 m über dem Dach.
d) $|\vec{u}| = \sqrt{26} \approx 5{,}10\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 18{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Die Geschwindigkeit folgt aus dem Betrag der Richtungsvektoren. Für die Lage der Bahnen verwendet man verschiedene Parameter. Über welchem Punkt sich die Bahnen kreuzen, ergibt sich aus den ersten beiden Koordinaten; die dritte liefert die Höhendifferenz.

a) $|(8|6|0)| = 10$ km/min $= 600$ km/h; $|(0|10|0)| = 10$ km/min $= 600$ km/h.
b) Die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen. Gleichsetzen: dritte Zeile $8 = 10$, Widerspruch. Also windschief.
c) Gleiche x_1- und x_2-Koordinaten: $8r = 40 \Rightarrow r = 5$, $6r = 30 = -30 + 10s \Rightarrow s = 6$. Über dem Punkt $(40|30)$ liegt Flugzeug 1 in 8 km, Flugzeug 2 in 10 km Höhe: 2 km Differenz.
d) Flugzeug 1 um 10:05 Uhr, Flugzeug 2 um 10:06 Uhr.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Die Seilgerade verläuft durch Tal- und Bergstation. Längen erhält man

mit dem Betrag des Verbindungsvektors, die Steigung als Verhältnis von Höhenunterschied zu horizontaler Entfernung. Punkte in bestimmter Höhe ergeben sich aus der dritten Zeile.

a) : $\vec{x} = (200|100|750)^T + r \cdot (1\,200|900|1\,200)^T$, $0 \le r \le 1$.

b) Seillänge $\sqrt{1200^2 + 900^2 + 1200^2} = \sqrt{3\,690\,000} \approx 1920{,}9$ m; Höhenunterschied $1\,200$ m.

c) Horizontal: $\sqrt{1200^2 + 900^2} = 1\,500$ m; Steigung $\frac{1200}{1500} = 80\,\%$.

d) $750 + 1200r = 1350 \Rightarrow r = 0{,}5$: Punkt $(800|550|1\,350)$.

e) $r = 0{,}25$: $(500|325|1\,050)$. Die Stütze muss bis $1\,050$ m reichen, also 70 m hoch sein.

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: Der Laserstrahl ist eine Gerade mit $r \ge 0$. Der Auftreffpunkt auf dem Boden ist der Spurpunkt mit $x_3 = 0$. Die Länge des Strahls ist $r \cdot |\vec{u}|$. Für den Tisch prüft man, welche Höhe der Strahl über dem Tischpunkt hat.

a) $\vec{x} = (0|2|3)^T + r \cdot (4|1|-2)^T$, $r \ge 0$.

b) $3 - 2r = 0 \Rightarrow r = 1{,}5$: Auftreffpunkt $(6|3{,}5|0)$.

c) $1{,}5 \cdot |\vec{u}| = 1{,}5 \cdot \sqrt{21} \approx 6{,}87$ m.

d) Über $(4|3)$ wäre $4r = 4 \Rightarrow r = 1$, dann $x_2 = 3$ ✓ und $x_3 = 1$. Der Strahl trifft die Tischoberkante genau bei $(4|3|1)$.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Der Schatten der Mastspitze liegt dort, wo der Sonnenstrahl durch die Spitze den Boden trifft. Man stellt die Gerade auf, setzt $x_3 = 0$ und erhält die Schattenspitze. Die Schattenlänge ist der Abstand zum Fußpunkt, der Sonnenstand folgt mit dem Tangens.

a) Spitze $S(5|4|8)$: $\vec{x} = (5|4|8)^T + r \cdot (-2|-1|-1)^T$.

b) $8 - r = 0 \Rightarrow r = 8$: Schattenspitze $(-11|-4|0)$.

c) Vom Fußpunkt: $|(-16|-8|0)| = \sqrt{320} \approx 17{,}89$ m.

d) $\tan\alpha = \frac{8}{17{,}89} \approx 0{,}447 \Rightarrow \alpha \approx 24{,}1°$.

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Die beiden Vortriebsrichtungen sind Geraden mit verschiedenen Parametern. Aus zwei Zeilen werden r und s bestimmt, die dritte Zeile entscheidet, ob sich die Trupps treffen. Bei einem Messfehler in der Höhenrichtung wird die dritte Gleichung verletzt.

a) Erste Zeile: $10r = 180 - 20s$, zweite: $5r = 130 - 20s$. Subtrahieren: $5r = 50 \Rightarrow r = 10$, $s = 4$. Dritte Zeile: $10 = 14 - 4$ ✓. Durchschlag in $M(100|50|10)$.

b) Abschnitt 1: $10 \cdot |\vec{u}| = 10\sqrt{126} \approx 112{,}2$ m; Abschnitt 2: $4 \cdot \sqrt{801} \approx 113{,}2$ m.

c) Aus den ersten beiden Zeilen folgt wieder $r = 10$, $s = 4$. Dritte Zeile: $10 = 14 - 8 = 6$

, Widerspruch; keine Vielfachen: windschief: Die Trupps verfehlen sich. An der Stelle des geplanten Durchschlags liegt der Stollen von Trupp 2 4 m zu tief.
d) Die horizontalen Koordinaten könnten stimmen, während die Höhen verschieden sind; im Raum treffen sich zwei Geraden nur, wenn alle drei Gleichungen erfüllt sind.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Die Eckpunkte werden aus den Kantenlängen abgelesen. Die Raumdiagonalen werden als Geraden aufgestellt und gleichgesetzt. Ihr Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Quaders; die Diagonalenlänge folgt aus dem räumlichen Satz des Pythagoras.

a) $E(0|0|3)$, $F(6|0|3)$, $G(6|4|3)$, $H(0|4|3)$.
b) $AG:\ \vec{x} = r \cdot (6|4|3)^T$; $BH:\ \vec{x} = (6|0|0)^T + s \cdot (-6|4|3)^T$.
c) $6r = 6 - 6s$, $4r = 4s \Rightarrow r = s = \frac{1}{2}$; Probe $1{,}5 = 1{,}5$. Schnittpunkt $M(3|2|1{,}5)$, der Mittelpunkt des Quaders.
d) $\sqrt{36 + 16 + 9} = \sqrt{61} \approx 7{,}81$ m $> 7{,}5$ m: Das Rohr passt diagonal hinein.

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Die Bahnen werden zunächst mit verschiedenen Parametern geschnitten. Für den Abstand der Flugzeuge zu einem Zeitpunkt wird dagegen derselbe Parameter t verwendet. Das Abstandsquadrat ist eine quadratische Funktion, deren Minimum man mit der Ableitung bestimmt.

a) $6r = 30 \Rightarrow r = 5$; $8r = 10s \Rightarrow s = 4$; dritte Zeile $9 = 9$ ✓. Schnittpunkt $(30|40|9)$.
b) Flugzeug 1 nach 5 min, Flugzeug 2 nach 4 min; kein Zusammenstoß.
c) $\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t) = (6t - 30|8t - 10t|0)^T = (6t - 30| - 2t|0)^T$; Betrag $\sqrt{(6t - 30)^2 + 4t^2}$.
d) $D(t) = d(t)^2 = 40t^2 - 360t + 900$; $D'(t) = 80t - 360 = 0 \Rightarrow t = 4{,}5$.
$D(4{,}5) = 810 - 1620 + 900 = 90$, $d = \sqrt{90} \approx 9{,}49$ km.
e) $9{,}49$ km $> 9{,}26$ km: Der Mindestabstand wird knapp eingehalten. Die Lotsen würden trotzdem eingreifen, zum Beispiel durch eine Höhenänderung.

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: First und Traufe werden als Geraden mit gleichem Richtungsvektor aufgestellt und mit einer Punktprobe als echt parallel erkannt. Die Sparrenlänge ist ein Vektorbetrag. Für die Solarmodule vergleicht man zwei Anordnungen auf der rechteckigen Dachhälfte.

a) First: $\vec{x} = (0|4|9)^T + r \cdot (1|0|0)^T$; Traufe: $\vec{x} = (0|0|6)^T + s \cdot (1|0|0)^T$. Gleiche Richtung, A liegt nicht auf dem First: echt parallel.
b) , Länge 5 m. Dachfläche: $2 \cdot 10 \cdot 5 = 100\,\mathrm{m}^2$.
c) $AF_1:\ (0|0|6)^T + r(0|4|3)^T$, $CF_2:\ (10|8|6)^T + s(0|-4|3)^T$. Keine Vielfachen; erste Zeile $0 = 10$: Widerspruch, also windschief.
d) $(7|4|9)$.

e) Dachhälfte 10 m $\times$ 5 m. Module quer ($1{,}7$ m entlang des Sparrens, 1 m entlang der Traufe): $2 \cdot 10 = 20$ Module ($3{,}4$ m von 5 m genutzt). Hochkant entlang der Traufe: $5 \cdot 5 = 25$ Module ($5 \cdot 1{,}7 = 8{,}5$ m und $5 \cdot 1 = 5$ m). Also höchstens etwa 25 Module.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: Der Parameter zählt Zeiteinheiten von 10 Sekunden. Positionen erhält man durch Einsetzen, die Tiefe durch die dritte Zeile. Für das Riff führt man eine Punktprobe durch, und die Abtauchgeschwindigkeit pro Minute ergibt sich aus sechs Zeiteinheiten.

a) 1 Minute sind 6 Zeiteinheiten: $(12|6|-12)$.
b) $-2r = -20 \Rightarrow r = 10$, also nach 100 s; Strecke $10 \cdot |\vec{u}| = 10 \cdot 3 = 30$ m.
c) $2r = 30 \Rightarrow r = 15$; $x_2 = 15$ ✓, $x_3 = -30$ ✓. Ja, nach 150 s.
d) Pro Minute $6 \cdot 2 = 12$ m tiefer: Ja, sie bleibt unter 18 m pro Minute.

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Zuerst zeigt man, dass die Richtungsvektoren für kein a Vielfache sein können. Dann setzt man gleich und bestimmt aus zwei Zeilen r und s; die verbleibende Zeile liefert eine Bedingung für a. Für alle anderen a sind die Geraden windschief.

a) Die dritte Koordinate von $(1|a|1)^T$ ist 1, die von $(1|1|0)^T$ ist 0: Ein Vielfaches ist unmöglich.
b) I: $1 + r = s$; III: $r = 2 \Rightarrow s = 3$; II: $2a = 1 + 3 = 4 \Rightarrow a = 2$. Schnittpunkt $(3|4|2)$.
c) Für $a \neq 2$ ist das System widersprüchlich, die Geraden sind windschief.
d) $r = 0$ liefert $(1|0|0)$. Für jeden Punkt gilt $x_1 - x_3 = (1 + r) - r = 1$.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Die Seilgerade verläuft vom Start zum Ziel. Über einem Bodenpunkt bestimmt man aus den ersten Koordinaten den Parameter und dann die Höhe des Seils. Diese Höhe wird mit der Höhe von Fichte und Hochsitz und dem Sicherheitsabstand verglichen.

a) $: \vec{x} = (0|0|40)^T + r \cdot (240|180|-30)^T,\ 0 \leq r \leq 1.$

b) $\sqrt{240^2 + 180^2 + 30^2} = \sqrt{90\,900} \approx 301{,}5$ m; horizontal 300 m, Gefälle $\frac{30}{300} = 10\,\%$.
c) $240r = 120 \Rightarrow r = 0{,}5$, $x_2 = 90$ ✓; Höhe $40 - 15 = 25$ m, also 3 m über dem Wipfel: eingehalten.
d) $240r = 200 \Rightarrow r = \frac{5}{6}$, $x_2 = 150$ ✓; Höhe $40 - 25 = 15$ m, nur 1 m über dem Hochsitz: nicht eingehalten.
e) Über der Fichte bleiben $3 - 1{,}5 = 1{,}5$ m Platz; am Hochsitz würde der Rutschende anstoßen ($1 - 1{,}5$). Der Hochsitz muss versetzt werden.

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: Drei Punkte liegen auf einer Geraden, wenn zwei Verbindungsvektoren

Vielfache sind; daraus folgt t. Punkte mit gegebenem Abstand findet man mit einem Richtungsvektor der Länge 3. Der Schwerpunkt liegt auf der Seitenhalbierenden bei zwei Dritteln.

a) , . Kollinear genau dann, wenn $t-1=2$, also $t=3$.

b) $\vec{x}=(1|1|1)^T+r\cdot(1|2|2)^T$, denn $|(1|2|2)^T|=\sqrt{1+4+4}=3$.

c) Abstand 6 bedeutet $|r|\cdot 3=6\Rightarrow r=\pm 2$: $(3|5|5)$ und $(-1|-3|-3)$.

d) $M_a=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=(3|5|4)$; Seitenhalbierende $\vec{x}=(1|1|1)^T+r\cdot(2|4|3)^T$. Schwerpunkt bei $r=\frac{2}{3}$: .