Lernzettel - Funktionenscharen

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Einstieg: Der Wasserstrahl im Garten

Frau Petersen bewässert ihren Garten in Kiel mit dem Schlauch. Das Wasser verlässt die Düse immer mit derselben Geschwindigkeit, aber sie kann den Schlauch flacher oder steiler halten. Jede Haltung erzeugt eine andere Wurfparabel: flach gehalten spritzt das Wasser niedrig und nicht sehr weit, steil gehalten hoch, aber ebenfalls nicht weit. Bei welcher Neigung kommt der Strahl am weitesten?

Alle diese Parabeln haben dieselbe Bauart, nur eine Zahl ändert sich: die Anfangssteigung a des Strahls. Man fasst sie zu einer **Funktionenschar** f_a zusammen und untersucht alle Kurven auf einmal. Statt einzelner Zahlen erhält man Formeln, in denen a vorkommt, und kann dann gezielt den besten Parameter auswählen.

Was ist eine Funktionenschar?

Definition: Funktionenschar

Eine **Funktionenschar** ist eine Menge von Funktionen, die sich nur in einem **Parameter** unterscheiden. Man schreibt $f_a(x) = \ldots$ und nennt a den Scharparameter. Setzt man für a eine Zahl ein, erhält man eine konkrete Funktion: Zu $f_a(x) = ax^2 - 2x$ gehören für $a = 1$ die Funktion $x^2 - 2x$, für $a = 2$ die Funktion $2x^2 - 2x$ und so weiter. Alle Graphen zusammen bilden die **Kurvenschar**. Im Abitur werden Scharen sehr häufig verwendet, weil sich viele Eigenschaften in einer einzigen Rechnung für alle Parameterwerte gleichzeitig untersuchen lassen.

Definition: Funktionenschar

Eine **Funktionenschar** f_a ist eine Menge von Funktionen, die sich durch einen Parameter $a \in \mathbb{R}$ unterscheiden. Für jeden festen Wert von a ist f_a eine gewöhnliche Funktion.

Untersuchung in Abhängigkeit vom Parameter

Definition: Fallunterscheidungen

Der Parameter wird beim Rechnen wie eine feste Zahl behandelt. Beim Ableiten nach x ist a eine Konstante, beim Lösen von Gleichungen wird nach x aufgelöst und a bleibt als Buchstabe stehen. Dabei sind oft **Fallunterscheidungen** nötig, etwa weil eine Wurzel nur für $a \geq 0$ definiert ist oder weil für $a = 0$ eine Gleichung entartet.

Beispiel 1: Nullstellen

$f_a(x) = x^3 - 3ax$ mit $a > 0$. Ausklammern: $f_a(x) = x(x^2 - 3a)$. Nullstellen: $x = 0$, $x = \sqrt{3a}$, $x = -\sqrt{3a}$. Für a gibt es nur die Nullstelle $x = 0$.

Beispiel 2: Extrempunkte

Für $f_a(x) = x^3 - 3ax$ ist $f_a'(x) = 3x^2 - 3a = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$. Mit $f_a''(x) = 6x$ gilt: $f_a''(-\sqrt{a})$ (Hochpunkt) und $f_a''(\sqrt{a}) > 0$ (Tiefpunkt). Die Funktionswerte sind $f_a(-\sqrt{a}) = -a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} = 2a\sqrt{a}$ und $f_a(\sqrt{a}) = -2a\sqrt{a}$. Hochpunkt $H(-\sqrt{a}\,|\,2a\sqrt{a})$, Tiefpunkt $T(\sqrt{a}\,|\,-2a\sqrt{a})$.

Satz: Extremstellen einer Schar

Die Extremstellen von f_a ergeben sich aus $f_a'(x) = 0$; sie hängen im Allgemeinen von a ab. Ob ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt, zeigt $f_a''(x_0)$; dabei kann das Vorzeichen von a entscheidend sein (Fallunterscheidung).

Ortskurven

Definition: Ortskurve

Bewegt sich ein Punkt P_a (zum Beispiel der Tiefpunkt) mit wachsendem a, beschreibt er eine Kurve, die **Ortskurve**. Man bestimmt sie in drei Schritten: 1. Koordinaten $x = x_P(a)$ und $y = y_P(a)$ des Punktes berechnen. 2. Die x-Gleichung nach a auflösen. 3. Das Ergebnis in die y-Gleichung einsetzen. Für den Tiefpunkt aus Beispiel 2: $x = \sqrt{a} \Rightarrow a = x^2$, also $y = -2a\sqrt{a} = -2x^2 \cdot x = -2x^3$. Die Ortskurve ist $y = -2x^3$ (für $x > 0$).

So gehst du vor: Ortskurve bestimmen

1. Koordinaten des Punktes (z. B. Extrempunkt) in Abhängigkeit von a berechnen: $x = x(a)$, $y = y(a)$.
2. Die erste Gleichung nach a auflösen.
3. In die zweite Gleichung einsetzen: Das Ergebnis $y = g(x)$ ist die Ortskurve.

Gemeinsame Punkte der Schar

Ein Punkt $(x_0|y_0)$ liegt auf *allen* Graphen, wenn $f_a(x_0) = y_0$ für jedes a gilt. Beispiel: $f_a(x) = a(x^2 - 2x) + 3$. Der Term $a(x^2 - 2x)$ verschwindet für alle a, wenn $x^2 - 2x = 0$, also bei $x = 0$ und $x = 2$. Alle Graphen gehen durch $P_1(0|3)$ und $P_2(2|3)$.

Satz: Gemeinsame Punkte

Ein Punkt $(x \mid y)$ liegt auf allen Graphen der Schar, wenn $f_a(x) = y$ für alle a gilt. Die Gleichung muss dann unabhängig von a erfüllt sein; man ordnet nach Potenzen von a und setzt jeden Koeffizienten null.

Bestimmung eines Parameters aus einer Bedingung

Oft ist ein Parameter gesucht, für den eine Eigenschaft gilt. Beispiel: Für welches a hat $f_a(x) = x^2 + ax$ bei $x = 1$ die Steigung 5? Es gilt $f_a'(x) = 2x + a$, also $f_a'(1) = 2 + a = 5 \Rightarrow a = 3$. Weiteres Beispiel: Wann berührt $f_a(x) = x^2 - ax + 2$ die x-Achse? Die Diskriminante muss null sein: $a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$.

Mit e-Funktion und Logarithmus

Beispiel: $f_a(x) = x\,\mathrm{e}^{-ax}$ mit $a > 0$. Produkt- und Kettenregel: $f_a'(x) = (1 - ax)\mathrm{e}^{-ax}$, also $f_a'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a}$. Der Funktionswert ist $f_a(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a\mathrm{e}}$. Wegen des Vorzeichenwechsels von f_a' von $+$ nach $-$ liegt ein Hochpunkt vor. Ortskurve: $a = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{\mathrm{e}}$.

Schar im Sachzusammenhang

In Anwendungsaufgaben beschreibt der Parameter eine Größe, die sich von Fall zu Fall ändert: die Spannweite einer Brücke, die Wachstumskonstante einer Population oder den Preis eines Produkts. Beispiel: Die Konzentration eines Medikaments wird durch $c_k(t) = k\,t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ beschrieben, wobei $k > 0$ von der Dosis abhängt. Die Ableitung $c_k'(t) = k(1 - 0{,}5t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ hat die Nullstelle $t = 2$, unabhängig von k. Der Zeitpunkt der höchsten Konzentration ist also bei jeder Dosis gleich; nur der Höchstwert $c_k(2) = \frac{2k}{\mathrm{e}}$ wächst mit k. Solche Aussagen „unabhängig vom Parameter“ sind typische Prüfungsfragen und lassen sich nur mit einer Rechnung in Abhängigkeit von k begründen.

Flächen und Integrale bei Scharen

Auch Integrale lassen sich in Abhängigkeit vom Parameter berechnen: $\int_0^2 (ax + 1)\,dx = 2a + 2$. Man erhält eine Funktion von a, die man gleichsetzen oder untersuchen kann, zum Beispiel $2a + 2 = 5 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$. Beim Flächeninhalt unter $f_a(x) = ax - x^2$ ergibt sich $A(a) = \frac{a^3}{6}$; dieser wächst mit a sehr schnell.

Vorgehen im Abitur

So gehst du vor

1. Aufgabenstellung lesen: Gilt die Aussage für alle a oder nur für bestimmte a?
2. Parameter wie eine Zahl behandeln, nur nach x ableiten.
3. Fallunterscheidungen am Anfang notieren (Vorzeichen von a).
4. Ergebnisse in Abhängigkeit von a angeben, nicht mit einem Beispielwert rechnen.
5. Bei Ortskurven den Parameter vollständig eliminieren und den Definitionsbereich

der Ortskurve angeben.

Weitere Beispiele

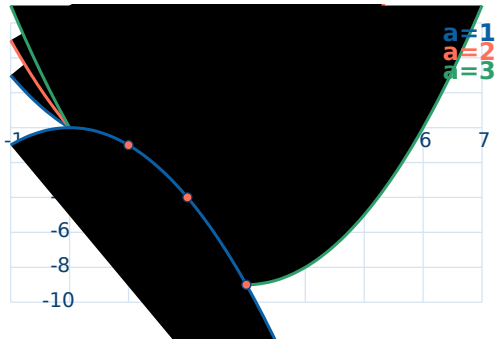
Beispiel 3: Extrempunkte einer Schar

Gegeben ist $f_a(x) = x^2 - 2ax$ mit $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Extrempunkte und die Ortskurve.

$f_a'(x) = 2x - 2a = 0 \Rightarrow x = a$; $f_a'' = 2 > 0$, also Tiefpunkt $T_a(a \mid -a^2)$. Mit $x = a$, $y = -a^2$ folgt die Ortskurve $y = -x^2$.

Scharen grafisch untersuchen und Ortskurven deuten

Ein Graph mit mehreren Scharkurven zeigt, wie sich die Kurven mit dem Parameter verändern. Bei $f_a(x) = x^2 - 2ax$ wandert der Tiefpunkt $T(a \mid -a^2)$ mit wachsendem a nach rechts unten. Alle Tiefpunkte liegen auf der Parabel $y = -x^2$, der Ortskurve. Außerdem gehen alle Graphen durch den Ursprung, denn $f_a(0) = 0$ gilt für jedes a.



Beispiel 4: Ortskurve der Tiefpunkte

Bestimmen Sie die Ortskurve der Tiefpunkte von $f_a(x) = x^2 - 2ax$.

$f_a'(x) = 2x - 2a = 0 \Rightarrow x = a$; $f_a''(x) = 2 > 0$: Tiefpunkt $T(a \mid -a^2)$. Aus $x = a$ folgt $y = -a^2 = -x^2$. Die Ortskurve ist $y = -x^2$. Für $a = 2$ liegt der Tiefpunkt bei $(2 \mid -4)$, und tatsächlich ist $-2^2 = -4$.

Den Parameter im Sachzusammenhang deuten

In Anwendungen steht der Parameter für eine Größe, die man einstellen kann: die Dosis eines Medikaments, den Abwurfwinkel, einen Preis oder eine Wachstumsrate. Typische Fragen lauten dann: Welcher Wert des Parameters ist optimal? Welcher erfüllt eine Vorgabe? Welche Eigenschaften hängen gar nicht vom Parameter ab? Eine solche Unabhängigkeit ist oft die interessanteste Erkenntnis einer Scharuntersuchung.

Beispiel 5: Die Wirkstoffkonzentration

Nach Einnahme einer Tablette mit der Dosis a gilt für die Konzentration im Blut $c_a(t) = a\,t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ (t in Stunden, c in mg/l). Wann ist die Konzentration am höchsten, und welche Dosis führt zu höchstens 8 mg/l?

$c_a{}'(t) = a\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}(1 - 0{,}5t) = 0 \Rightarrow t = 2$, unabhängig von der Dosis. Höchstwert $c_a(2) = \frac{2a}{\mathrm{e}}$. Bedingung $\frac{2a}{\mathrm{e}} \le 8 \Rightarrow a \le 4\mathrm{e} \approx 10{,}87$. Eine größere Dosis verschiebt also nicht den Zeitpunkt, sondern nur die Höhe des Maximums.

Optimale Parameter: der weiteste Wasserstrahl

Hält man den Schlauch mit der Anfangssteigung a, so beschreibt $f_a(x) = ax - 0{,}05(1 + a^2)x^2$ den Strahl (Austrittsgeschwindigkeit $10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, x und $f_a(x)$ in m). Die Abbildung zeigt drei Strahlen.



Beispiel 6: Die größte Wurfweite

Bei welcher Steigung a ist die Wurfweite am größten?

Nullstellen: $x\left(a - 0{,}05(1 + a^2)x\right) = 0 \Rightarrow w(a) = \frac{20a}{1+a^2}$. Ableitung nach a: $w'(a) = \frac{20(1+a^2) - 40a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{20(1-a^2)}{(1+a^2)^2} = 0 \Rightarrow a = 1$. Bei $a = 1$ (Winkel 45°) beträgt die Weite 10 m. Hier wird eine Funktion des Parameters selbst optimiert.

Wusstest du? Die Sicherheitsparabel

Zeichnet man sehr viele Wurfparabeln mit derselben Anfangsgeschwindigkeit, aber verschiedenen Winkeln, so berühren alle eine gemeinsame äußere Parabel, die „Sicherheitsparabel“. Außerhalb von ihr kann kein Wasserstrahl und kein geworfener Ball ankommen. Feuerwehrleute und Artilleristen kannten diesen Zusammenhang schon im 17. Jahrhundert, als Galileo Galilei die Wurfbewegung als Parabel erkannte.

Typische Fehler bei Scharen

Bei Funktionenscharen passieren immer wieder dieselben Fehler. Häufig wird der Parameter beim Ableiten wie eine Variable behandelt; dabei ist a eine feste Zahl, abgeleitet wird nur nach x. Ein zweiter Fehler ist das Teilen durch einen Ausdruck mit a, der null werden kann: Dabei geht der Fall $a = 0$ verloren. Drittens wird vergessen, dass Wurzeln und Logarithmen nur für bestimmte Werte definiert sind. Notieren Sie deshalb zu

Beginn den zulässigen Bereich des Parameters und prüfen Sie am Ende, ob Ihre Ergebnisse darin liegen. Eine Probe mit einem konkreten Wert, etwa $a = 1$, deckt viele Fehler auf. Gerade im Abitur lohnt sich diese kleine Kontrolle fast immer.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Eine Funktionenschar f_a ordnet jedem Parameterwert a eine eigene Funktion zu; die Graphen bilden eine Kurvenschar.
- Beim Ableiten nach x ist a eine Konstante: $f_a(x) = ax^3 \Rightarrow f_a{}'(x) = 3ax^2$. Ergebnisse (Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte) hängen von a ab.
- Fallunterscheidungen beachten: Vorzeichen von a, $a = 0$, Radikanden unter Wurzeln, Definitionsbereich bei Logarithmen.
- Ortskurve: Koordinaten $x(a)$, $y(a)$ eines besonderen Punktes bestimmen, $x(a)$ nach a auflösen, in $y(a)$ einsetzen; Ergebnis $y = h(x)$.
- Gemeinsame Punkte aller Graphen: $f_a(x) = f_b(x)$ für $a \neq b$ oder a ausklammern; der Faktor bei a muss null sein.
- Parameter aus Bedingungen: Bedingung als Gleichung in a aufschreiben (Nullstelle, Extremstelle, Fläche, Tangente) und nach a lösen.
- Im Sachzusammenhang hat a eine Bedeutung (Dosis, Abwurfwinkel, Preis); Ergebnisse müssen im zulässigen Bereich von a liegen.
- Flächen bei Scharen: Integrationsgrenzen hängen oft von a ab; der Flächeninhalt $A(a)$ ist wieder eine Funktion von a.

Achtung: Typische Fehler

- Den Parameter beim Ableiten wie eine Variable behandeln (z. B. $(ax^2)' = 2x$ statt $2ax$).
- Fallunterscheidung vergessen: Für a gibt es zum Beispiel keine reelle Wurzel aus a.
- Ortskurve mit a angeben, statt a zu eliminieren.
- Nur mit einem Beispielwert für a argumentieren und das als Beweis für alle a werten.

Ottos Tipp: Zeichne dir zur Kontrolle ein oder zwei Graphen mit konkreten Werten wie $a = 1$ und $a = 2$. Das Verhalten der ganzen Schar wird dadurch sofort verständlich!

Ottos Tipp

Behandeln Sie a wie eine feste Zahl und rechnen Sie ganz normal. Erst wenn Fallunterscheidungen nötig werden (z. B. $a > 0$ oder a), schauen Sie genauer auf den Parameter.