Arbeitsblatt - Funktionenscharen

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Den Einfluss des Parameters beschreiben

Gegeben ist die Schar $f_a(x) = ax^2 + 1$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie die Graphen für $a = 2$, $a = 0{,}5$, $a = 0$ und $a = -1$.
b) Beschreiben Sie, wie a die Form des Graphen beeinflusst.
c) Welcher Punkt liegt auf allen Graphen?
d) Für welche a hat f_a Nullstellen? Geben Sie sie an.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Nullstellen in Abhängigkeit von a

Bestimmen Sie die Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameter.

a) $f_a(x) = x^2 - 2ax$
b) $g_a(x) = x^2 - a^2$
c) $h_a(x) = x^3 - ax$ mit $a > 0$
d) $k_a(x) = (x - a)\,\mathrm{e}^x$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Extrempunkte und Ortskurve

Gegeben ist $f_a(x) = x^3 - 3a^2x$ mit $a > 0$.

a) Bestimmen Sie die Extrempunkte in Abhängigkeit von a.
b) Zeigen Sie, dass der Hochpunkt auf der Kurve $y = -2x^3$ liegt.
c) Bestimmen Sie die Ortskurve der Tiefpunkte.
d) Für welches a liegt der Tiefpunkt bei $y = -16$?

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Wendepunkte einer Schar

Gegeben ist $f_a(x) = x^3 - 3ax^2$ mit $a \neq 0$.

a) Bestimmen Sie den Wendepunkt.
b) Bestimmen Sie die Ortskurve der Wendepunkte.
c) Berechnen Sie die Steigung im Wendepunkt.
d) Für welches a verläuft die Wendetangente durch den Ursprung?

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Gemeinsame Punkte

Untersuchen Sie, ob alle Graphen der Schar gemeinsame Punkte haben.

a) $f_a(x) = a(x^2 - 4) + 1$
b) $g_a(x) = ax^2 - (a+1)x + 1$
c) $h_a(x) = x^2 + ax + a$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Parameter aus Bedingungen

Bestimmen Sie den Parameter so, dass die Bedingung erfüllt ist.

a) $f_a(x) = x^2 - ax + 4$ hat genau eine Nullstelle.
b) $g_a(x) = x^3 - ax$ hat bei $x = 2$ eine Extremstelle.
c) $h_a(x) = ax^2 + 2x$ hat einen Hochpunkt mit y-Wert 2.
d) Der Graph von $k_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$ hat bei $x = 0$ die Steigung 3.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Eine e-Funktionenschar

Gegeben ist $f_a(x) = x\,\mathrm{e}^{-ax}$ mit $a > 0$.

a) Bestimmen Sie $f_a{}'$ mit der Produktregel.
b) Bestimmen Sie den Hochpunkt.
c) Bestimmen Sie die Ortskurve der Hochpunkte.
d) Für welches a liegt der Hochpunkt bei $x = 4$? Wie hoch ist er dann?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Eine Logarithmus-Schar

Gegeben ist $f_a(x) = \ln x - ax$ mit $a > 0$ und $x > 0$.

a) Bestimmen Sie die Extremstelle und die Art des Extremums.
b) Geben Sie den Extrempunkt an.
c) Bestimmen Sie die Ortskurve.
d) Für welches a berührt der Graph die x-Achse?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Wirkstoff im Blut

Für die Konzentration eines Schmerzmittels im Blut gilt $c_a(t) = a\,t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ (t in Stunden nach der Einnahme, c_a in mg/l). Der Parameter $a > 0$ hängt von der Dosis ab. Wirksam ist das Mittel ab 2 mg/l, ab 10 mg/l treten Nebenwirkungen auf.

a) Zeigen Sie, dass die höchste Konzentration unabhängig von a nach 2 Stunden

erreicht wird.
b) Berechnen Sie die höchste Konzentration für $a = 5$.
c) Für welche Werte von a treten keine Nebenwirkungen auf?
d) Für $a = 5$: Wann wird die Wirkschwelle 2 mg/l nach dem Maximum wieder unterschritten? (Näherung mit dem Taschenrechner)
e) Beschreiben Sie, wie sich der Graph für größere a verändert.

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Der weiteste Wasserstrahl

Ein Wasserstrahl aus einem Gartenschlauch wird durch $f_a(x) = ax - 0{,}05(1 + a^2)x^2$ beschrieben (x waagerechte Entfernung, $f_a(x)$ Höhe über der Düse, beides in m; $a > 0$ ist die Anfangssteigung).

a) Berechnen Sie die Wurfweite $w(a)$.
b) Bestimmen Sie die maximale Wurfweite und den zugehörigen Winkel.
c) Berechnen Sie die größte Höhe $h(a)$ des Strahls.
d) Welche Steigungen führen zu einer Weite von 8 m? Vergleichen Sie die Höhen.
e) Ein Beet beginnt 9 m entfernt. Kann Frau Petersen es erreichen?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Preis und Gewinn

Ein Hersteller von Fahrradhelmen kalkuliert mit dem Verkaufspreis p (in €) pro Helm. Der Gewinn bei x verkauften Helmen (in Hundert Stück) beträgt $G_p(x) = (p - 20)x - 0{,}5x^2 - 100$ (in Hundert €).

a) Bestimmen Sie die gewinnmaximale Menge in Abhängigkeit von p.
b) Berechnen Sie den maximalen Gewinn $G_{\max}(p)$.
c) Ab welchem Preis kann überhaupt Gewinn erzielt werden?
d) Bei $p = 40$ €: Wie viele Helme sollte er verkaufen, und welcher Gewinn ergibt sich?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Das Wachstum der Sonnenblume

Die Höhe einer Sonnenblume (in m) wird durch $h_k(t) = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-kt}$ modelliert (t in Wochen nach dem Auspflanzen, $k > 0$ hängt von Sorte und Standort ab).

a) Welche Höhe hat die Pflanze beim Auspflanzen, und welcher Höhe nähert sie sich?
b) Bestimmen Sie k so, dass die Sonnenblume nach 4 Wochen 1 m hoch ist.
c) Berechnen Sie für dieses k die Wachstumsgeschwindigkeit nach 4 Wochen.
d) Zeigen Sie: $h_k{}'(t) = k\,(2 - h_k(t))$. Deuten Sie die Gleichung.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Flächen bei Scharen

Bearbeiten Sie die Flächenaufgaben.

a) Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen von $f_a(x) = ax(3 - x)$ ($a > 0$) und der x-Achse.
b) Für welches a beträgt diese Fläche 9 FE?
c) Berechnen Sie die Fläche zwischen $g(x) = x^2$ und $h_a(x) = ax$ ($a > 0$).
d) Für welches a beträgt diese Fläche 36 FE?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Tangenten an eine Schar

Gegeben ist $f_a(x) = x^2 + a$.

a) Bestimmen Sie die Tangente an f_a im Punkt mit $x = 1$.
b) Für welches a verläuft diese Tangente durch den Ursprung?
c) Zeigen Sie: Alle Tangenten an der Stelle $x = 1$ sind parallel.
d) Für welches a berührt der Graph die Gerade $y = 2x$?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Eine Schar mit Fallunterscheidung

Gegeben ist $f_a(x) = x^3 - ax$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass alle Graphen punktsymmetrisch zum Ursprung sind.
b) Untersuchen Sie, für welche a der Graph Extrempunkte hat, und bestimmen Sie diese.
c) Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrempunkte.
d) Bestimmen Sie die Steigung der Tangente im Ursprung und beschreiben Sie, was für $a = 0$ passiert.
e) Für welches a hat der Tiefpunkt den y-Wert -2?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Die Schar f_k(x) = (x – k)·e^x

Gegeben ist $f_k(x) = (x - k)\,\mathrm{e}^x$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie Nullstelle und y-Achsenabschnitt.
b) Zeigen Sie: $f_k{}'(x) = (x - k + 1)\,\mathrm{e}^x$ und $f_k{}''(x) = (x - k + 2)\,\mathrm{e}^x$.
c) Bestimmen Sie Tiefpunkt und Wendepunkt.
d) Bestimmen Sie die Ortskurve der Tiefpunkte.
e) Zeigen Sie, dass sich zwei verschiedene Graphen der Schar nie schneiden.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Das größte Tor im Bogen

Ein Torbogen hat die Form $f_a(x) = a - x^2$ ($a > 0$, in m). Unter dem Bogen soll ein rechteckiges Tor stehen, dessen obere Ecken auf dem Bogen liegen.

a) Stellen Sie den Flächeninhalt $A(u)$ des Tores in Abhängigkeit von der halben Breite u auf.
b) Bestimmen Sie die Breite des größten Tores in Abhängigkeit von a.
c) Zeigen Sie: Das größte Tor ist immer genau $\frac{2}{3}$ so hoch wie der Bogen.
d) Der Bogen ist 6 m hoch. Wie groß ist das größte Tor?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Kostenfunktionen mit Parameter

Ein Betrieb modelliert seine Kosten mit $K_a(x) = x^3 - 6x^2 + ax + 32$ (x in Tausend Stück, K in Tausend €, $a > 0$). Eine sinnvolle Kostenfunktion muss streng monoton steigen.

a) Berechnen Sie $K_a'(x)$.
b) Für welche a ist K_a streng monoton steigend? (Hinweis: Diskriminante.)
c) Bestimmen Sie den Wendepunkt und deuten Sie ihn als Übergang vom degressiven zum progressiven Kostenanstieg.
d) Für $a = 15$: Bestimmen Sie die minimalen Grenzkosten.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Berührende Scharkurven

Gegeben ist $g_a(x) = ax^2 - (a+1)x + 1$ mit $a \neq 0$.

a) Zeigen Sie, dass alle Graphen durch $P(0|1)$ und $Q(1|0)$ gehen.
b) Für welches a hat der Graph in Q eine waagerechte Tangente?
c) Für welches a hat g_a bei $x = 2$ eine Nullstelle?
d) Bestimmen Sie die Steigung aller Graphen in P und für welches a die Tangente in P senkrecht zur Geraden $y = x$ ist.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Wendepunkte und Flächen (Knobelaufgabe)

Gegeben ist $f_a(x) = x^4 - ax^2$ mit $a > 0$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen und zeigen Sie die Symmetrie.
b) Bestimmen Sie die Wendepunkte und deren Ortskurve.
c) Zeigen Sie: Die Fläche zwischen Graph und x-Achse beträgt $A(a) = \frac{4}{15}a^{\frac{5}{2}}$.
d) Für welches a ist die Fläche gleich $\frac{128}{15}$?
e) Zeigen Sie: Die Wendetangenten schneiden sich auf der y-Achse, und berechnen Sie diesen Punkt für $a = 6$.