Lösungen - Funktionenscharen

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Man wählt einige Werte von a und zeichnet die Graphen. Daran erkennt man den Einfluss des Parameters: Vorzeichen und Betrag von a bestimmen Öffnung und Breite. Gemeinsame Punkte erkennt man daran, dass der Funktionswert dort nicht von a abhängt.

a) Alle Graphen sind Parabeln mit Scheitel $(0|1)$ (für $a = 0$ die Gerade $y = 1$); $a = 2$ schmal nach oben, $a = 0{,}5$ breit nach oben, $a = -1$ nach unten geöffnet.
b) $a > 0$: nach oben geöffnet, a: nach unten; je größer $|a|$, desto schmaler die Parabel.
c) $f_a(0) = 1$ für alle a: $P(0|1)$.
d) $ax^2 = -1 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{a}$; Lösungen nur für a: $x = \pm\sqrt{-\frac{1}{a}}$.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Nullstellen bestimmt man wie bei Funktionen ohne Parameter: ausklammern, binomische Formeln oder Satz vom Nullprodukt. Der Parameter wird wie eine Zahl behandelt. Wo eine Wurzel auftritt, muss das Vorzeichen des Radikanden beachtet werden.

a) $x(x - 2a) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 2a$.
b) $(x - a)(x + a) = 0 \Rightarrow x = \pm a$ (für $a = 0$ nur $x = 0$).
c) $x(x^2 - a) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = \pm\sqrt{a}$.
d) $\mathrm{e}^x > 0$, also nur $x = a$.

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg: Die Ableitung wird nach x gebildet, a bleibt als Konstante stehen. Aus $f_a'(x) = 0$ folgen die Extremstellen in Abhängigkeit von a. Für die Ortskurve löst man die x-Koordinate nach a auf und setzt in die y-Koordinate ein.

a) $f_a{}'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 0 \Rightarrow x = \pm a$; $f_a{}''(x) = 6x$. Hochpunkt $H(-a|2a^3)$ ($f_a{}''(-a)$), Tiefpunkt $T(a|-2a^3)$.
b) $x = -a \Rightarrow a = -x$; $y = 2a^3 = 2(-x)^3 = -2x^3$ ✓.
c) $x = a$: $y = -2a^3 = -2x^3$. Auch die Tiefpunkte liegen auf $y = -2x^3$.
d) $-2a^3 = -16 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Die zweite Ableitung liefert die Wendestelle in Abhängigkeit von a, die dritte Ableitung bestätigt sie. Ortskurve und Steigung im Wendepunkt folgen durch Einsetzen. Die Wendetangente wird allgemein aufgestellt und anschließend auf die Bedingung geprüft.

a) $f_a'(x) = 3x^2 - 6ax$, $f_a''(x) = 6x - 6a = 0 \Rightarrow x = a$; $f_a''' = 6 \neq 0$.
$W(a|a^3 - 3a^3) = W(a|-2a^3)$.
b) $x = a \Rightarrow y = -2x^3$.
c) $f_a'(a) = 3a^2 - 6a^2 = -3a^2$.
d) Tangente $y = -3a^2(x - a) - 2a^3 = -3a^2x + a^3$; durch den Ursprung: $a^3 = 0$, also $a = 0$, ausgeschlossen. Für kein zulässiges a.

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Gemeinsame Punkte aller Graphen findet man, indem man den Funktionsterm nach a ordnet und ausklammert. Der Faktor vor a muss null sein, damit der Funktionswert nicht vom Parameter abhängt. Die Lösungen liefern die festen Punkte.

a) a ausklammern: Der Wert hängt nicht von a ab, wenn $x^2 - 4 = 0$, also $x = \pm 2$. Gemeinsame Punkte $(-2|1)$ und $(2|1)$.
b) $g_a(x) = a(x^2 - x) - x + 1$; $x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 1$. Gemeinsame Punkte $(0|1)$ und $(1|0)$.
c) $h_a(x) = x^2 + a(x + 1)$; $x = -1$: $h_a(-1) = 1$. Gemeinsamer Punkt $(-1|1)$.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Jede Bedingung wird in eine Gleichung für a übersetzt: Diskriminante gleich null für genau eine Nullstelle, erste Ableitung gleich null für eine Extremstelle, Funktionswert für eine vorgegebene Höhe. Danach wird die Art des Extremums geprüft.

a) Diskriminante $a^2 - 16 = 0 \Rightarrow a = \pm 4$.
b) $g_a'(2) = 12 - a = 0 \Rightarrow a = 12$; $g_{12}''(2) = 12 > 0$: Tiefpunkt.
c) $h_a'(x) = 2ax + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{a}$; $h_a\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{2}{a} = -\frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ (Hochpunkt, da a).
d) $k_a'(0) = a = 3$.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: Die Ableitung entsteht mit Produktregel und Kettenregel; der Faktor e^{-ax} wird ausgeklammert. Da er immer positiv ist, entscheidet der andere Faktor über die Nullstelle. Die Ortskurve ergibt sich durch Eliminieren von a.

a) $f_a'(x) = \mathrm{e}^{-ax} - ax\,\mathrm{e}^{-ax} = (1 - ax)\,\mathrm{e}^{-ax}$.
b) $1 - ax = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a}$; Vorzeichenwechsel $+ \to -$: .
c) $x = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = x$; $y = \frac{x}{\mathrm{e}}$. Die Hochpunkte liegen auf der Ursprungsgeraden $y = \frac{1}{\mathrm{e}}x$.
d) $\frac{1}{a} = 4 \Rightarrow a = 0{,}25$; $y = \frac{4}{\mathrm{e}} \approx 1{,}472$.

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: Für $x > 0$ wird abgeleitet und die Nullstelle der Ableitung bestimmt. Die zweite Ableitung ist stets negativ, also liegt ein Maximum vor. Berührt der Graph die x-

Achse, ist der Hochpunkt eine Nullstelle; das liefert eine Gleichung für a.

a) $f_a'(x) = \frac{1}{x} - a = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a}$; $f_a''(x) = -\frac{1}{x^2}$: Maximum.
b) $f_a\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\frac{1}{a} - 1 = -\ln a - 1$: $H\left(\frac{1}{a}\middle|-\ln a - 1\right)$.
c) $a = \frac{1}{x}$: $y = -\ln\frac{1}{x} - 1 = \ln x - 1$.
d) Berühren heißt Hochpunkt auf der x-Achse: $-\ln a - 1 = 0 \Rightarrow a = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}3679$.

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Die Ableitung zeigt, dass der Zeitpunkt der höchsten Konzentration nicht von der Dosis abhängt. Die Höhe des Maximums ist proportional zu a. Für die Grenze der Nebenwirkungen wird eine Ungleichung gelöst, für die Wirkschwelle eine Gleichung numerisch.

a) $c_a'(t) = a\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}(1 - 0{,}5t) = 0 \Rightarrow t = 2$; Vorzeichenwechsel $+ \to -$.
b) $c_5(2) = \frac{10}{\mathrm{e}} \approx 3{,}68$ mg/l.
c) $\frac{2a}{\mathrm{e}}$.
d) $5t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 2$ liefert mit dem Taschenrechner $t \approx 5{,}09$ h; ab dann ist das Mittel unwirksam.
e) Alle Graphen haben das Maximum bei $t = 2$; größeres a streckt den Graphen in y-Richtung.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Die Wurfweite ist die zweite Nullstelle der Parabel und hängt von a ab. Ihr Maximum findet man, indem man $w(a)$ nach a ableitet. Die größte Höhe liegt in der Mitte der Weite; weitere Bedingungen führen auf quadratische Gleichungen in a.

a) $f_a(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \frac{a}{0{,}05(1+a^2)} = \frac{20a}{1+a^2}$.
b) $w'(a) = \frac{20(1-a^2)}{(1+a^2)^2} = 0 \Rightarrow a = 1$ (Winkel 45°); $w(1) = 10$ m.
c) Scheitel bei $x = \frac{w}{2} = \frac{10a}{1+a^2}$: $h(a) = \frac{10a^2}{1+a^2} - 0{,}05(1+a^2)\frac{100a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{5a^2}{1+a^2}$.
d) $\frac{20a}{1+a^2} = 8 \Rightarrow 8a^2 - 20a + 8 = 0 \Rightarrow a = 2$ oder $a = 0{,}5$. Höhen $h(2) = 4$ m, $h(0{,}5) = 1$ m.
e) Ja, für $\frac{20a}{1+a^2} \geq 9$, also $9a^2 - 20a + 9 \leq 0$, d. h. etwa $0{,}62 \leq a \leq 1{,}60$.

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: Die gewinnmaximale Menge folgt aus der Ableitung nach x, wobei der Preis als Parameter behandelt wird. Setzt man sie ein, erhält man den maximalen Gewinn als Funktion des Preises. Gewinn ist nur möglich, wenn dieser Maximalwert positiv ist.

a) $G_p'(x) = p - 20 - x = 0 \Rightarrow x = p - 20$ (für $p > 20$); $G_p'' = -1$.
b) $G_{\max}(p) = (p-20)^2 - 0{,}5(p-20)^2 - 100 = 0{,}5(p-20)^2 - 100$.
c) *0{,}5(p-20)^2>100\Rightarrow p-20>\sqrt{200}\Rightarrow p>34{,}14\,€*.
d) $x = 20$, also 2 000 Helme; $G = 0{,}5 \cdot 400 - 100 = 100$ Hundert €, also *10\,000\,€*.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Beim Auspflanzen setzt man $t = 0$, die Grenzhöhe erhält man für $t \to \infty$. Der Parameter k folgt aus einer Messung mit dem Logarithmus. Die Ableitung beschreibt die Wachstumsgeschwindigkeit und erfüllt die Gleichung des beschränkten Wachstums.

a) $h_k(0) = 0$; für $t \to \infty$ gilt $h_k(t) \to 2$ m.
b) $2 - 2\mathrm{e}^{-4k} = 1 \Rightarrow \mathrm{e}^{-4k} = 0{,}5 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{4} \approx 0{,}1733$.
c) $h_k'(t) = 2k\,\mathrm{e}^{-kt}$; $h_k'(4) = 2k \cdot 0{,}5 = k \approx 0{,}173$ m pro Woche, also etwa 17 cm pro Woche.
d) $k(2 - h_k) = k \cdot 2\mathrm{e}^{-kt} = h_k'$ ✓. Die Wachstumsgeschwindigkeit ist proportional zur noch fehlenden Höhe bis 2 m (beschränktes Wachstum).

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Zuerst werden die Integrationsgrenzen bestimmt, die hier von a abhängen können. Das Integral liefert den Flächeninhalt als Funktion des Parameters. Eine vorgegebene Fläche führt dann zu einer Gleichung für a.

a) Nullstellen 0 und 3: $\int_0^3 (3ax - ax^2)\,\mathrm{d}x = a\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = a(13{,}5 - 9) = 4{,}5a$.
b) $4{,}5a = 9 \Rightarrow a = 2$.
c) Schnittstellen $x = 0$ und $x = a$: $\int_0^a (ax - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$.
d) $\frac{a^3}{6} = 36 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Die Tangente wird allgemein mit Funktionswert und Ableitung an der Stelle aufgestellt. Bedingungen wie „durch den Ursprung“ führen zu einer Gleichung für a. Gleiche Steigung für alle a bedeutet, dass alle Tangenten parallel sind.

a) $f_a'(1) = 2$, $f_a(1) = 1 + a$: $y = 2(x - 1) + 1 + a = 2x + a - 1$.
b) $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$.
c) Die Steigung ist für jedes a gleich 2.
d) Berühren bei $x = 1$ mit Steigung 2: $1 + a = 2 \Rightarrow a = 1$ (die Tangente aus b) ist $y = 2x$).

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Die Symmetrie folgt aus $f_a(-x) = -f_a(x)$. Extrempunkte existieren nur, wenn die Gleichung $x^2 = \frac{a}{3}$ Lösungen hat; das erfordert eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von a. Ortskurve und Bedingungen folgen durch Einsetzen.

a) $f_a(-x) = -x^3 + ax = -f_a(x)$.
b) $f_a'(x) = 3x^2 - a = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{a}{3}$. Für $a \leq 0$ keine Extrempunkte (für $a = 0$ Sattelpunkt im Ursprung). Für $a > 0$: $x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$; Tiefpunkt , Hochpunkt symmetrisch.

c) $a = 3x^2$: $y = x^3 - 3x^2 \cdot x = -2x^3$.
d) $f_a{}'(0) = -a$. Für $a = 0$ ist die Tangente waagerecht, der Ursprung ist ein Sattelpunkt.
e) $-2x^3 = -2$ mit $x = 1$: $a = 3x^2 = 3$.

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: Mit der Produktregel entstehen erste und zweite Ableitung; der Faktor e^x bleibt stets erhalten. Tiefpunkt und Wendepunkt ergeben sich aus den Nullstellen der Ableitungen. Dass sich zwei Graphen nie schneiden, zeigt die Differenz zweier Scharfunktionen.

a) Nullstelle $x = k$; $f_k(0) = -k$.
b) Produktregel: $f_k{}' = \mathrm{e}^x + (x-k)\mathrm{e}^x$; nochmals: $f_k{}'' = \mathrm{e}^x + (x-k+1)\mathrm{e}^x$.
c) $x = k-1$: $T(k-1 \mid -\mathrm{e}^{k-1})$ ($f_k{}''(k-1) = \mathrm{e}^{k-1} > 0$); $x = k-2$: $W(k-2 \mid -2\mathrm{e}^{k-2})$.
d) $x = k-1 \Rightarrow y = -\mathrm{e}^x$.
e) $(x-k)\mathrm{e}^x = (x-m)\mathrm{e}^x \Rightarrow k = m$: Für $k \neq m$ gibt es keinen Schnittpunkt; $f_k(x) - f_m(x) = (m-k)\mathrm{e}^x \neq 0$.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: Die Fläche des Tores hängt von der halben Breite u ab, die Höhe ist der Funktionswert an der Stelle u. Das Maximum findet man mit der Ableitung nach u. Das Ergebnis enthält a und zeigt ein festes Höhenverhältnis.

a) $A(u) = 2u(a-u^2) = 2au - 2u^3$, 0.
b) $A'(u) = 2a - 6u^2 = 0 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{a}{3}}$; A''. Breite $2\sqrt{\frac{a}{3}}$.
c) Höhe $a - \frac{a}{3} = \frac{2}{3}a$ ✓.
d) $a = 6$: Breite $2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ m, Höhe 4 m, Fläche $8\sqrt{2} \approx 11{,}31\,\mathrm{m}^2$.

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Eine Kostenfunktion steigt streng monoton, wenn ihre Ableitung keine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat. Dazu untersucht man die Diskriminante der quadratischen Ableitung. Der Wendepunkt ist hier unabhängig von a und markiert die minimalen Grenzkosten.

a) $K_a{}'(x) = 3x^2 - 12x + a$.
b) $K_a{}'(x) > 0$ für alle x, wenn $144 - 12a$, also $a > 12$ (für $a = 12$ nur an einer Stelle null, ebenfalls monoton).
c) $K_a{}''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$, unabhängig von a: $W(2 \mid 2a + 16)$. Bis $2\,000$ Stück wachsen die Kosten immer langsamer, danach immer schneller.
d) Minimum von K' an der Wendestelle: $K_{15}{}'(2) = 12 - 24 + 15 = 3$ Tausend € pro Tausend Stück.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Feste Punkte prüft man durch Einsetzen. Für eine waagerechte

Tangente setzt man die Ableitung gleich null, für eine Nullstelle den Funktionswert. Eine Bedingung an die Steigung im Punkt P führt auf eine Gleichung, deren Lösung mit dem zulässigen Bereich verglichen wird.

a) $g_a(0) = 1$; $g_a(1) = a - a - 1 + 1 = 0$.
b) $g_a{}'(x) = 2ax - (a+1)$; $g_a{}'(1) = a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$: $g_1(x) = (x-1)^2$.
c) $4a - 2a - 2 + 1 = 0 \Rightarrow a = 0{,}5$.
d) $g_a{}'(0) = -(a+1)$; senkrecht zu $y = x$ bedeutet Steigung -1: $a = 0$, ausgeschlossen. Kein zulässiges a.

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: Nullstellen und Symmetrie folgen aus dem Ausklammern. Die Wendepunkte liefern nach Eliminieren von a die Ortskurve. Die Fläche wird über das symmetrische Intervall integriert. Für die Wendetangenten nutzt man die Achsensymmetrie des Graphen.

a) $x^2(x^2 - a) = 0 \Rightarrow x = 0$ (doppelt), $x = \pm\sqrt{a}$; $f_a(-x) = f_a(x)$: achsensymmetrisch.
b) $f_a{}''(x) = 12x^2 - 2a = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{6}}$; $y = \frac{a^2}{36} - \frac{a^2}{6} = -\frac{5a^2}{36}$. Mit $a = 6x^2$: $y = -5x^4$.
c) Zwischen $-\sqrt{a}$ und $\sqrt{a}$ liegt der Graph unterhalb der Achse:
$A = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (ax^2 - x^4)\,\mathrm{d}x = 2\left(\frac{a \cdot a^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{a^{\frac{5}{2}}}{5}\right) = \frac{4}{15}a^{\frac{5}{2}}$.
d) $a^{\frac{5}{2}} = 32 \Rightarrow a = 4$.
e) Wegen der Achsensymmetrie sind die Wendetangenten spiegelbildlich und schneiden sich auf der y-Achse. $a = 6$: $W(1|-5)$, $f_6{}'(1) = 4 - 12 = -8$; Tangente $y = -8x + 3$, Schnittpunkt $(0|3)$.