Lösungen zur Klassenarbeit - Flächenberechnung mit Integralen

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Zuerst werden die Nullstellen mit der Mitternachtsformel oder durch Faktorisieren bestimmt; sie sind die Integrationsgrenzen (eine BE). Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse, deshalb ist das Integral negativ und der Flächeninhalt sein Betrag. Für Stammfunktion, Einsetzen der Grenzen und Betrag gibt es drei Bewertungseinheiten.

a) $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$ oder $x = 3$. (1 BE)

b) $\int_{-1}^{3} f\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3} = (9 - 9 - 9) - \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) = -\frac{32}{3}$; der Graph liegt unterhalb der Achse, also $A = \frac{32}{3}$ FE. (3 BE)

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Schnittstellen erhält man durch Gleichsetzen der beiden Funktionen und Lösen der quadratischen Gleichung (zwei BE). Zwischen den Schnittstellen liegt die Parabel oberhalb der Geraden; man integriert die Differenz „oben minus unten“ und erhält direkt den Flächeninhalt (zwei BE). Eine Skizze unterstützt die Begründung. Zwischenschritt:

$\int_0^3 (3x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[1{,}5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 13{,}5 - 9 = 4{,}5$ FE. Häufig wird vergessen, g vor dem Integrieren abzuziehen.

a) $-x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 3$. (2 BE)

b) $A = \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2}$ FE. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 3 (2 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Man berechnet das Integral zunächst bis zu einer variablen oberen Grenze b mit der Stammfunktion $-\frac{2}{x^2}$. Anschließend wird der Grenzwert für $b \to \infty$ gebildet; weil der Term mit b gegen null geht, existiert er (Konvergenz). Für Integral und Grenzwert gibt es je eine Bewertungseinheit.

Zwischenschritt: $\int_1^b 4x^{-3}\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{2}{b^2} \to 2$. Zum Vergleich divergiert $\int_1^\infty \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x$, weil der Logarithmus unbeschränkt wächst.

$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2}{x^2}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(2 - \frac{2}{b^2}\right) = 2$. Der Term $\frac{2}{b^2}$ geht gegen null, das Integral konvergiert. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 4 (7 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Breite folgt aus den Nullstellen der Parabel (eine BE). Die volle Querschnittsfläche ist der Betrag des Integrals zwischen den Nullstellen (drei BE). Für die teilweise Füllung ändern sich die Grenzen und die obere Begrenzung; man integriert die Differenz zwischen Wasserlinie und Kanalboden und vergleicht beide Flächen (drei BE).

a) $0{,}1x^2 = 2{,}5 \Rightarrow x = \pm 5$; Breite 10 m. (1 BE)

b) $A = 2\int_0^5 (2{,}5 - 0{,}1x^2)\,dx = 2\left[2{,}5x - \frac{x^3}{30}\right]_0^5 = 2\left(12{,}5 - \frac{25}{6}\right) = \frac{50}{3} \approx 16{,}7\,\mathrm{m}^2$. (3 BE)

c) $Q = A \cdot v \approx 16{,}67 \cdot 0{,}8 \approx 13{,}3\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$. (3 BE)

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Nullstellen 0 und a sind die Integrationsgrenzen; das Integral der Funktion liefert $A(a) = \frac{a^3}{6}$ (zwei BE). Setzt man diesen Term gleich 36, erhält man $a^3 = 216$ und damit den positiven Parameter (eine BE). Ein kurzer Antwortsatz nennt den gefundenen Wert. Kontrolle: Für $a = 6$ ist $\int_0^6 (6x - x^2)\,\mathrm{d}x = 108 - 72 = 36$. Häufiger Fehler ist, die Nullstellen falsch als 0 und $-a$ anzusetzen.

Nullstellen 0 und a; $A = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{6}$; aus $\frac{a^3}{6} = 36$ folgt $a = 6$. (3 BE)