Lernzettel - Flächenberechnung mit Integralen

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Einstieg: Was kostet das Grundstück am Bach?

Die Gemeinde verkauft ein Baugrundstück, dessen Grenzen nicht gerade verlaufen: An einer Seite begrenzt ein geschwungener Bach, an der anderen ein schräger Weg. Der Preis hängt vom Flächeninhalt ab, doch eine Formel für Rechtecke oder Dreiecke passt nicht. Die Vermesser legen ein Koordinatensystem über den Plan und beschreiben Bach und Weg durch Funktionsterme. Die Fläche dazwischen berechnen sie dann mit einem Integral. Genau diese Idee steckt hinter allen Flächenaufgaben der Abiturprüfung: Aus zwei Funktionstermen wird ein Flächeninhalt, und aus dem Flächeninhalt werden Material, Volumen oder Kosten.

Dazu klären wir zuerst, wann ein Integral eine Fläche misst und wann nicht, dann die Fläche zwischen zwei Graphen und die Schrittfolge, die Sie in jeder Aufgabe anwenden können. Zum Schluss folgen uneigentliche Integrale, Flächen mit Parameter, Flächenhalbierung und Anwendungen.

Vom Integral zum Flächeninhalt

Definition: orientierter

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist ein **orientierter** Flächeninhalt: Teile des Graphen oberhalb der x-Achse zählen positiv, Teile unterhalb negativ. Möchte man den tatsächlichen Flächeninhalt A zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über $[a;b]$ bestimmen, muss man den Betrag jedes Teilstücks nehmen. Dazu bestimmt man alle Nullstellen von f im Intervall $(a;b)$ und integriert abschnittsweise:

Beispiel 1

Gesucht ist die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = x^3 - x$ und der x-Achse über $[-1;1]$. Nullstellen: $x(x^2-1) = 0$, also $x = -1, 0, 1$. Mit $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ gilt $\int_{-1}^{0} f\,dx = F(0) - F(-1) = 0 - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$ und $\int_{0}^{1} f\,dx = F(1) - F(0) = -\frac{1}{4}$. Der Flächeninhalt ist $A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, das Gesamtintegral wäre dagegen null.

Satz: Fläche zwischen Graph und x-Achse

Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über $[a;b]$ ist $A = \int_a^b |f(x)|\,dx$. Man berechnet ihn, indem man an den Nullstellen in Teilintervalle zerlegt.

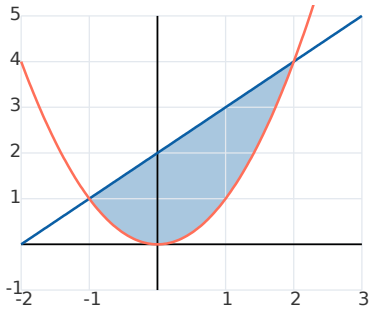
Fläche zwischen zwei Graphen

Definition: Schnittstellen

Schließen die Graphen von f und g auf $[a;b]$ eine Fläche ein, dann gilt $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$. Ist $f(x) \geq g(x)$ auf dem ganzen Intervall, kann der Betrag entfallen: $A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$. Die Integrationsgrenzen sind die **Schnittstellen**, also die Lösungen von $f(x) = g(x)$. Gibt es mehr als zwei Schnittstellen, muss man abschnittsweise integrieren, denn die Funktion mit dem größeren Wert wechselt.

Beispiel 2

Die Graphen von $f(x) = x + 2$ und $g(x) = x^2$ schneiden sich bei $x^2 = x + 2$, also $x^2 - x - 2 = 0$ mit $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Auf $[-1;2]$ liegt die Gerade oben. Es ist $A = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{9}{2}$.



Satz: Fläche zwischen zwei Graphen

Schneiden sich f und g in x_1 und gilt $f \geq g$ auf $[x_1; x_2]$, so ist $A = \int_{x_1}^{x_2} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$.

Schrittfolge für Abituraufgaben

So gehst du vor

1. Skizze oder Wertetabelle: Wo verläuft welcher Graph oben?
2. Schnittstellen bestimmen (Gleichung $f(x) = g(x)$ lösen, mögliche Substitution oder Faktorisieren).

3. Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x)$ bilden und eine Stammfunktion D angeben.
4. Prüfen, ob d im Intervall das Vorzeichen wechselt; wenn ja, abschnittsweise rechnen.
5. Ergebnis in Flächeneinheiten (FE) angeben, im Sachzusammenhang zum Beispiel in m^2.

Uneigentliche Integrale

Definition: uneigentlichen Integral

Reicht ein Intervall bis ins Unendliche, spricht man von einem **uneigentlichen Integral**. Man definiert $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$. Existiert der Grenzwert, ist die Fläche endlich, obwohl sie unbeschränkt lang ist. Ein Beispiel: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1$. Dagegen divergiert $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty$. Auch $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}(1-\mathrm{e}^{-b}) = 1$ ist endlich. Daran sieht man: Nur wenn der Graph schnell genug gegen 0 geht, ist die Fläche endlich.

Flächen mit Parameter

Häufig kommt im Abitur ein Parameter a vor. Beispiel: Der Graph von $f_a(x) = ax - x^2$ mit $a > 0$ schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Nullstellen sind 0 und a. Dann ist $A(a) = \int_0^a (ax - x^2)\,dx = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$. Soll der Flächeninhalt 36 FE betragen, löst man $\frac{a^3}{6} = 36$, also $a^3 = 216$ und $a = 6$.

Flächen halbieren

Soll eine senkrechte Gerade $x = k$ die Fläche unter dem Graphen halbieren, setzt man $\int_a^k f\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b f\,dx$. Beispiel: Unter $f(x) = x^2$ über $[0;2]$ liegt die Fläche $\frac{8}{3}$. Die Gerade $x = k$ halbiert sie, wenn $\frac{k^3}{3} = \frac{4}{3}$, also $k = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}59$.

Weitere Beispiele

Beispiel 3: Dreiecksfläche prüfen

Die Fläche zwischen $f(x) = 2x$ und der x-Achse über $[0;3]$ ist ein Dreieck mit Grundseite 3 und Höhe 6, also $A = \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot 6 = 9$. Mit dem Integral: $\int_0^3 2x\,dx = [x^2]_0^3 = 9$. Solche geometrischen Kontrollen helfen, Rechenfehler zu finden.

Beispiel 4: drei Schnittstellen

Für $f(x) = x^3$ und $g(x) = x$ gilt $x^3 = x$, also $x(x-1)(x+1) = 0$ mit den Schnittstellen $-1, 0, 1$. Auf $[-1;0]$ ist $f \geq g$, auf $[0;1]$ ist $g \geq f$. Beide Teilflächen betragen $\frac{1}{4}$, die

Gesamtfläche ist $\frac{1}{2}$. Würde man ohne Beträge von -1 bis 1 integrieren, erhielte man null und damit ein falsches Ergebnis.

Beispiel 5: Sachaufgabe

Ein Gartenteich hat im Querschnitt die Form, die durch $f(x) = 0{,}25x^2 - 1$ (in Metern, $-2 \le x \le 2$) und die Gerade $y = 0$ begrenzt wird. Die Querschnittsfläche beträgt $\int_{-2}^{2}(0 - (0{,}25x^2 - 1))\,dx = \int_{-2}^{2}(1 - 0{,}25x^2)\,dx = [x - \frac{x^3}{12}]_{-2}^{2} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67\,\text{m}^2$. Multipliziert man mit der Länge des Teichs, erhält man sein Volumen.

Kontrollfragen vor dem Abgeben

- Ist das Ergebnis positiv und plausibel groß (Vergleich mit einem umschriebenen Rechteck)?
- Wurden alle Nullstellen im Intervall berücksichtigt?
- Stimmen Einheit und Rundung mit der Aufgabenstellung überein?
- Bei uneigentlichen Integralen: Wurde der Grenzwert wirklich begründet (Term, der gegen null geht)?

Flächen mit Tangente und y-Achse

Nicht immer sind die Integrationsgrenzen Schnittstellen zweier Graphen. Begrenzt auch die y-Achse oder eine senkrechte Gerade die Fläche, so ist die Grenze durch die Gleichung dieser Geraden vorgegeben, zum Beispiel $x = 0$. Besonders häufig wird in Abituraufgaben die Fläche zwischen einem Graphen, seiner Tangente in einem Punkt und der y-Achse verlangt. Dann bestimmen Sie zuerst die Tangente über $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ und integrieren anschließend die Differenz von Funktion und Tangente.

Beispiel 6

Die Parabel $f(x) = x^2$, ihre Tangente im Punkt $P(2|4)$ und die y-Achse begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt.

Es gilt $f'(x) = 2x$, also $f'(2) = 4$ und die Tangente lautet $t(x) = 4 + 4(x - 2) = 4x - 4$. Die Parabel liegt oberhalb der Tangente, denn $x^2 - (4x - 4) = (x - 2)^2 \ge 0$. Die Fläche reicht von $x = 0$ (y-Achse) bis $x = 2$ (Berührstelle):

$A = \int_0^2 (x - 2)^2\,dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_0^2 = 0 - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$ FE.

Sachaufgaben: Querschnitt, Volumen und Kosten

In vielen Sachaufgaben beschreibt ein Funktionsterm den Querschnitt eines Bauwerks: eines Tunnels, eines Teichs, eines Brückenbogens oder eines Kanals. Die Querschnittsfläche A in Quadratmetern ergibt, mit der Länge ℓ multipliziert, das Volumen $V = A \cdot \ell$ in Kubikmetern. Wird die Fläche mit einem Preis pro Quadratmeter multipliziert, ergeben sich Kosten für Fenster, Planen oder Rasenansaat. Achten Sie auf die Einheiten:

Wenn die Koordinaten in Metern gemessen werden, ist ein Flächeneinheit ein Quadratmeter. Wenn eine Längeneinheit dagegen zehn Meter bedeutet, entspricht eine Flächeneinheit hundert Quadratmetern.

Beispiel 7

Ein Entwässerungsgraben hat den Querschnitt zwischen $f(x) = 0{,}5x^2 - 2$ und der Geraden $y = 0$ (Maße in Metern). Wie viele Liter fasst er bei 40 m Länge?

Die Nullstellen von f sind $x = \pm 2$. Die Querschnittsfläche ist $A = \int_{-2}^{2} (0 - f(x))\,dx = \int_{-2}^{2} (2 - 0{,}5x^2)\,dx = 2\left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 2\left(4 - \frac{8}{6}\right) = \frac{16}{3}\,\mathrm{m}^2$. Das Volumen beträgt $V = \frac{16}{3} \cdot 40 = \frac{640}{3} \approx 213{,}3\,\mathrm{m}^3$, das sind rund $213\,300$ Liter.

Schnittstellen mit dem Rechner

Nicht jede Schnittgleichung lässt sich von Hand lösen. Bei $\mathrm{e}^x = x + 2$ etwa gibt es keine Lösung in geschlossener Form. Im Teil mit Hilfsmitteln bestimmen Sie die Schnittstellen mit dem Solver oder dem Schnittpunktbefehl des Taschenrechners, speichern sie unter a und b und lassen dann das Integral auswerten. Notieren Sie im Lösungsweg trotzdem die Differenzfunktion, die Grenzen auf drei Nachkommastellen und das Ergebnis mit Einheit. Eine kurze Plausibilitätskontrolle (Vergleich mit einem Rechteck) schützt vor Eingabefehlern.

Beispiel 8

Die Graphen von $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = x + 2$ schließen eine Fläche ein. Bestimmen Sie ihren Inhalt.

Die Gleichung $\mathrm{e}^x = x + 2$ hat die Lösungen $x_1 \approx -1{,}841$ und $x_2 \approx 1{,}146$. Dazwischen liegt die Gerade oben. Mit der Stammfunktion $D(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \mathrm{e}^x$ von $d(x) = x + 2 - \mathrm{e}^x$ folgt $A = D(x_2) - D(x_1) \approx 1{,}949$ FE. Plausibilität: Das Rechteck mit Breite 3 und mittlerer Höhe $1{,}3$ hätte etwa $3{,}9$ FE; die Fläche ist ein flacher Bogen, also nur etwa halb so groß.

Flächeninhaltsfunktion und Umkehraufgaben

Häufig soll nicht eine Zahl, sondern eine Funktion bestimmt werden: der Flächeninhalt $A(c) = \int_0^c f(x)\,dx$ in Abhängigkeit von der Obergrenze. Dann ist A eine Stammfunktion von f mit $A(0) = 0$, und die Umkehrfrage „Für welches c hat die Fläche den Inhalt 10 FE?“ ist eine Gleichung für c. Auch Aufgaben mit einem Parameter a im Funktionsterm laufen so ab: erst das Integral allgemein berechnen, dann die Bedingung einsetzen.

Beispiel 9

Für welches $c > 0$ hat die Fläche unter $f(x) = \sqrt{x}$ über $[0; c]$ den Inhalt 18 FE?

Mit $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ gilt $A(c) = \frac{2}{3}c^{3/2}$. Aus $\frac{2}{3}c^{3/2} = 18$ folgt $c^{3/2} = 27$, also $c = 27^{2/3} = 9$.

Probe: $\frac{2}{3} \cdot 9^{3/2} = \frac{2}{3} \cdot 27 = 18$.

Beispiel 10

Zeigen Sie, dass die Fläche unter $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ über $[0;\infty)$ den Inhalt 1 hat, und bestimmen Sie, wie groß b mindestens sein muss, damit die Fläche über $[0;b]$ mindestens $99\,\%$ davon enthält.

Es ist $\int_0^b \mathrm{e}^{-x}dx = 1 - \mathrm{e}^{-b} \to 1$ für $b \to \infty$. Die Bedingung $1 - \mathrm{e}^{-b} \geq 0{,}99$ bedeutet $\mathrm{e}^{-b} \leq 0{,}01$, also $b \geq \ln 100 \approx 4{,}61$. Schon nach etwa viereinhalb Längeneinheiten ist die unendlich lange Fläche fast vollständig erfasst.

Wusstest du? Archimedes und die Parabel

Schon Archimedes berechnete um 250 v. Chr. den Flächeninhalt eines Parabelsegments, ohne Integralrechnung, mit einer Ausschöpfungsmethode. Er zeigte, dass es genau $\frac{4}{3}$ des Inhalts des einbeschriebenen Dreiecks hat. Auch heute führt die Aufgabe „Parabel und Sehne“ immer auf den Faktor $\frac{1}{6}$: Für eine Parabel $y = ax^2 + bx + c$ mit den Schnittstellen x_1, x_2 mit einer Geraden gilt $A = \frac{|a|}{6}(x_2 - x_1)^3$. Das ist eine schöne Kontrolle für Ihre Rechnung.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Das Integral liefert den orientierten Flächeninhalt; für den echten Flächeninhalt wird an den Nullstellen von f in Teilintervalle zerlegt und von jedem Teil der Betrag genommen.
- Fläche zwischen zwei Graphen: $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$ mit den Schnittstellen als Grenzen; liegt f oben, genügt $\int_a^b (f - g)\,dx$.
- Vorgehen: Skizze oder Wertetabelle, Schnittstellen bestimmen, Differenzfunktion bilden, Vorzeichenwechsel prüfen, Ergebnis mit Einheit (FE oder m^2) angeben.
- Bei drei oder mehr Schnittstellen wechselt die obere Funktion; dann muss abschnittsweise integriert werden, sonst gleichen sich Teilflächen fälschlich aus.
- Uneigentliche Integrale: $\int_a^\infty f\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f\,dx$; $\int_1^\infty x^{-2}dx = 1$ konvergiert, $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ divergiert.
- Flächen mit Parameter: Flächeninhalt $A(a)$ als Term in a berechnen, dann Bedingungen wie $A(a) = 36$ nach a auflösen.
- Flächenhalbierung: Die Grenze k bestimmt man aus $\int_a^k f\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b f\,dx$.
- Im Sachzusammenhang liefert der Querschnitt mal die Länge das Volumen; Kosten entstehen aus Fläche mal Preis pro Quadratmeter.

Achtung: Typische Fehler

- Gesamtintegral statt Flächeninhalt berechnen, obwohl der Graph die x-Achse

schneidet.
- Falsche Reihenfolge bei $f - g$ und dadurch ein negatives Ergebnis; der Flächeninhalt ist stets positiv.
- Schnittstellen vergessen oder eine Lösung der quadratischen Gleichung weglassen.
- Obere und untere Grenze vertauschen oder beim Einsetzen negativer Zahlen Klammern vergessen.

Ottos Tipp: Eine kleine Skizze zeigt dir sofort, wo welcher Graph oben liegt. Zeichne auch dann, wenn die Aufgabe keine Skizze verlangt!

Ottos Tipp

Skizzieren Sie die Graphen immer grob, bevor Sie integrieren. Die Skizze zeigt, welche Funktion oben liegt und wie viele Teilflächen es gibt.