Arbeitsblatt - Flächenberechnung mit Integralen

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Fläche zwischen Graph und x-Achse

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt. Bestimmen Sie dazu zuerst die Nullstellen.

a) $f(x) = 4 - x^2$
b) $f(x) = x^2 - x - 6$
c) $f(x) = x^3 - 3x^2$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Zerlegen an den Nullstellen

Berechnen Sie jeweils das Integral und den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse im angegebenen Intervall. Beachten Sie die Vorzeichenwechsel.

a) $f(x) = x^3 - 4x$ über $[-2; 2]$
b) $f(x) = \sin x$ über $[0; 2\pi]$
c) $f(x) = x^2 - 2x$ über $[0; 3]$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Fläche zwischen zwei Graphen

Die Graphen von f und g schließen eine Fläche ein. Bestimmen Sie die Schnittstellen und den Flächeninhalt.

a) $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2$
b) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$
c) $f(x) = -x^2 + 6x$, $g(x) = x^2$
d) $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = x^2 - 4$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Drei Schnittstellen

Wenn die Graphen sich mehrmals schneiden, wechselt die obere Funktion. Berechnen Sie den Inhalt der eingeschlossenen Flächen und vergleichen Sie mit dem Gesamtintegral.

a) $f(x) = x^3$, $g(x) = x$
b) $f(x) = x^4$, $g(x) = x^2$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Mit Tangente und y-Achse

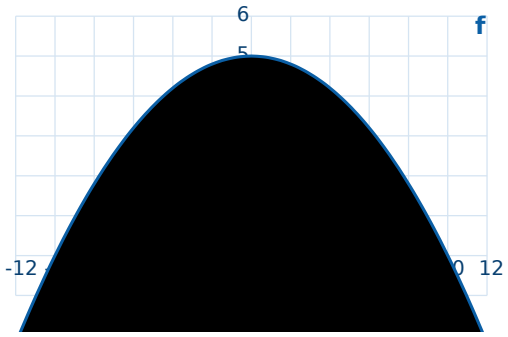
Gegeben ist $f(x) = x^2$ mit dem Punkt $P(2|4)$ auf dem Graphen. Die Tangente in P schließt mit der Parabel und der y-Achse eine Fläche ein.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in P.
b) Zeigen Sie, dass die Parabel oberhalb der Tangente verläuft.
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Der Brückenbogen

Der Querschnitt einer Fußgängerbrücke aus Beton (Maße in Metern) wird durch den Graphen von $f(x) = 5 - 0{,}05x^2$ und die x-Achse begrenzt. Die Brücke ist 8 m breit.



a) Bestimmen Sie die Spannweite des Bogens (Nullstellen von f).
b) Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche.
c) Berechnen Sie das Volumen des Betons, wenn die gesamte Querschnittsfläche ausgefüllt ist.
d) Beton hat eine Dichte von $2{,}4$ t pro m^3. Wie viele Tonnen wiegt das Bauteil?

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Der Gartenteich

Ein Gartenteich hat im Querschnitt die Form, die durch $f(x) = 0{,}25x^2 - 1$ (in Metern, $-2 \le x \le 2$) und die Gerade $y = 0$ begrenzt wird. Er ist 6 m lang.

a) Berechnen Sie die Querschnittsfläche.
b) Wie viele Liter Wasser fasst der Teich?
c) Eine Pumpe füllt 40 Liter pro Minute nach. Wie lange dauert das Befüllen?
d) Die Wasseroberfläche ist 4 m breit und 6 m lang. Wie viel Prozent davon bedeckt eine Seerosenfläche von $5\,\mathrm{m}^2$?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Das Dachfenster

Ein Dachfenster in Form eines Parabelsegments wird durch $f(x) = 2 - 0{,}5x^2$ und die x-Achse begrenzt (Maße in Metern). Das Glas kostet *180*\,€ pro m^2.

a) Bestimmen Sie die Breite des Fensters.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Glases.
c) Berechnen Sie den Preis des Glases.
d) Vergleichen Sie mit dem umschriebenen Rechteck und geben Sie den Anteil der Glasfläche an.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Das Grundstück am Bach

Ein Grundstück wird links, rechts und unten von einem Bach und einem geraden Weg begrenzt. Im Koordinatensystem (eine Längeneinheit entspricht 10 m) wird der Bach durch $f(x) = -0{,}05x^2 + x$ und der Weg durch $g(x) = 0{,}5x$ beschrieben.

a) Bestimmen Sie die Schnittstellen von Bach und Weg.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt in Flächeneinheiten.
c) Rechnen Sie in Quadratmeter um.
d) Der Quadratmeterpreis beträgt *85*\,€. Berechnen Sie den Kaufpreis.

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Der Tunnelquerschnitt

Der Querschnitt eines Straßentunnels (Maße in Metern) liegt zwischen der Fahrbahn $y = 0$ und dem Graphen von $f(x) = 4 - \frac{x^2}{4}$.

a) Wie breit ist der Tunnel an der Fahrbahn?
b) Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche.
c) Ein Lkw ist $2{,}5$ m breit und $3{,}5$ m hoch und fährt mittig. Passt er durch?
d) Der Tunnel ist 800 m lang. Wie viele Kubikmeter Luft enthält er?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Unendlich lange Flächen

Untersuchen Sie, ob die Flächen existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Inhalt.

a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$
b) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}\,dx$
c) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
d) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Fläche mit Parameter

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = ax - x^2$ mit $a > 0$.

a) Zeigen Sie, dass der Graph von f_a mit der x-Achse eine Fläche einschließt, und bestimmen Sie die Nullstellen.

b) Zeigen Sie: Der Flächeninhalt beträgt $A(a) = \frac{a^3}{6}$.

c) Für welches a beträgt der Flächeninhalt 36 FE?

d) Für welches a hat die Fläche den Inhalt $4{,}5$ FE?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Flächen halbieren

Eine senkrechte Gerade $x = k$ soll die Fläche unter einem Graphen in zwei gleich große Teile zerlegen.

a) Bestimmen Sie k für die Fläche unter $f(x) = x^2$ über $[0; 2]$.

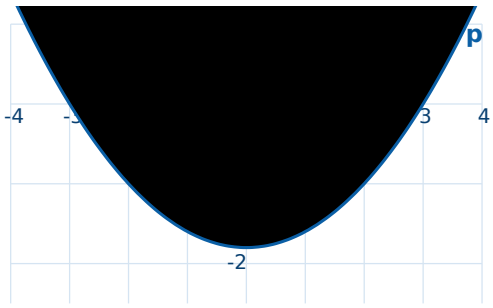
b) Bestimmen Sie b so, dass die Fläche unter $f(x) = \sqrt{x}$ über $[0; b]$ den Inhalt 18 hat.

c) Die Parabel $y = x^2$ und die Gerade $y = 4$ schließen eine Fläche ein. Welche waagerechte Gerade $y = c$ halbiert diese Fläche?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Das Becken im Freibad

Ein parabelförmiges Becken im Freibad hat den Querschnitt zwischen $f(x) = 0{,}2x^2 - 1{,}8$ und der Wasseroberfläche $y = 0$ (Maße in Metern, $-3 \le x \le 3$). Es ist 12 m lang.



a) Berechnen Sie die Querschnittsfläche bei vollem Becken.

b) Berechnen Sie das Volumen des Beckens in Litern.

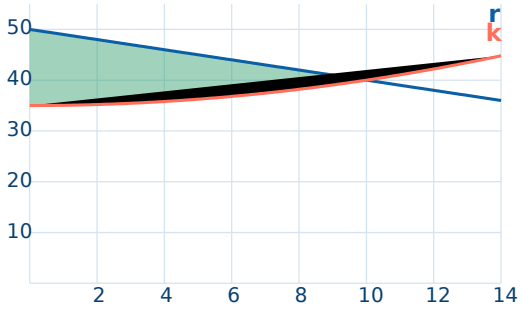
c) Das Becken wird nur bis zur Höhe $y = -0{,}9$ (halbe Tiefe) gefüllt. Berechnen Sie die Querschnittsfläche des Wassers (Schnittstellen bei $x = \pm\sqrt{4{,}5}$).

d) Wie viel Prozent des vollen Volumens sind in diesem Fall im Becken? Warum ist es weniger als die Hälfte?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Gewinnzuwachs durch Mehrproduktion

Ein Betrieb steigert die Produktion von $x = 0$ bis $x = 10$ (in Tausend Stück). Der Grenzerlös $r(x) = 50 - x$ und die Grenzkosten $k(x) = 0{,}05x^2 + 35$ sind in Euro pro Stück angegeben; die Fläche zwischen den Graphen ist der zusätzliche Gewinn in Tausend Euro.

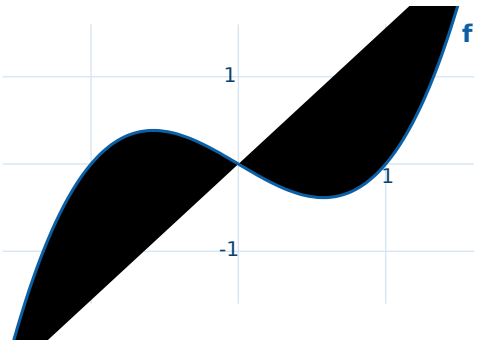


a) Zeigen Sie, dass sich r und k bei $x = 10$ schneiden.
b) Berechnen Sie den Gewinnzuwachs bei Steigerung von 0 auf 10 Tausend Stück.
c) Bei welcher Produktionsmenge ist die Differenz $r(x) - k(x)$ am größten?
d) Ab $x > 10$ sind die Grenzkosten höher als der Grenzerlös. Beurteilen Sie, ob die Produktion über 10 Tausend Stück sinnvoll ist.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Die Funktion x³ − x

Die Abbildung zeigt den Graphen von $f(x) = x^3 - x$. Die beiden Teilflächen sind gleich groß.



a) Berechnen Sie $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ und erklären Sie das Ergebnis.
b) Berechnen Sie den Inhalt der beiden Teilflächen und die Gesamtfläche.
c) Für welches $b > 1$ hat die Fläche zwischen Graph und x-Achse über $[1; b]$ den Inhalt $\frac{9}{4}$?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Das Vereinslogo

Das Logo eines Sportvereins besteht aus der Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$. Eine Längeneinheit entspricht 20 cm.

a) Bestimmen Sie die Schnittstellen der beiden Graphen.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt in Flächeneinheiten.
c) Rechnen Sie in Quadratzentimeter um.
d) Das Logo wird für *0{,}08*\,€ pro cm^2 gestickt. Wie viel kostet die Stickerei?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Medikament im Körper

Nach einer Injektion beträgt die Abbaurate eines Medikaments im Körper $r(t) = 20\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ (in mg pro Stunde, t in Stunden).

a) Berechnen Sie die in den ersten 4 Stunden abgebaute Menge.
b) Zeigen Sie, dass insgesamt höchstens 40 mg abgebaut werden können (uneigentliches Integral).
c) Nach wie vielen Stunden sind $90\,\%$ von diesen 40 mg abgebaut?
d) Erklären Sie, warum die Fläche trotz unendlicher Länge einen endlichen Inhalt hat.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Unterhalb des Graphen: eine Obergrenze gesucht

Gegeben ist $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x > 0$.

a) Berechnen Sie $\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx$ für $b > 1$.
b) Für welches b beträgt die Fläche mindestens $0{,}95$?
c) Zeigen Sie, dass die Fläche über $[1;\infty)$ den Inhalt 1 hat, die Fläche über $(0;1]$ aber unendlich groß ist.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Flächeninhaltsfunktion

Für $f(x) = 3x^2 - 6x$ betrachten wir $A(c) = \int_0^c f(x)\,dx$.

a) Bestimmen Sie $A(c)$ und die Nullstellen von A.
b) Für welches $c \in (0;2)$ ist $A(c)$ minimal? Wie groß ist die Fläche dann (als Betrag)?
c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.