Lösungen - Flächenberechnung mit Integralen

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Zuerst werden die Nullstellen berechnet, denn sie sind die Integrationsgrenzen. Liegt die Fläche unterhalb der x-Achse, ist das Integral negativ; der Flächeninhalt ist dann sein Betrag. Eine Skizze zeigt, ob die Fläche ober- oder unterhalb liegt.

a) Nullstellen ± 2. $A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$ FE.

b) Nullstellen -2 und 3; der Graph liegt dazwischen unterhalb der Achse.
$A = -\int_{-2}^{3} (x^2 - x - 6)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-2}^{3} = -\left(-\frac{27}{2} - \frac{22}{3}\right) = \frac{125}{6}$ FE.

c) $x^2(x-3) = 0$: Nullstellen 0 (doppelt) und 3, dazwischen ist $f \leq 0$.
$A = -\int_{0}^{3} (x^3 - 3x^2)\,dx = -\left[\frac{x^4}{4} - x^3\right]_{0}^{3} = -\left(\frac{81}{4} - 27\right) = \frac{27}{4}$ FE.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Zwischen den Nullstellen wechselt das Vorzeichen der Funktion. Deshalb wird das Intervall an den Nullstellen zerlegt, jedes Teilintegral einzeln berechnet und die Beträge addiert. Das Gesamtintegral ohne Zerlegung ist eine Flächenbilanz und meist kleiner.

a) Nullstellen $-2, 0, 2$. Teilintegrale $+4$ und -4: Integral 0, Fläche $A = 4 + 4 = 8$ FE.
b) Teilintegrale $+2$ und -2: Integral 0, Fläche $A = 2 + 2 = 4$ FE.
c) Nullstellen 0 und 2: $\int_0^2 = -\frac{4}{3}$, $\int_2^3 = \frac{4}{3}$. Integral 0, Fläche $A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ FE.

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg: Die Schnittstellen der Graphen sind die Integrationsgrenzen. Dazwischen bestimmt man, welche Funktion oben liegt, und integriert die Differenz „oben minus unten“. Ist die Lage unklar, nimmt man den Betrag des Integrals der Differenz.

a) $x^2 - x - 2 = 0$: $x = -1$ und $x = 2$. $A = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = \frac{9}{2}$ FE.

b) $x^2 = 2x$: $x = 0$ und $x = 2$, die Gerade liegt oben: $A = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{4}{3}$ FE.

c) $-2x^2 + 6x = 0$: $x = 0$ und $x = 3$. $A = \int_0^3 (6x - 2x^2)\,dx = 27 - 18 = 9$ FE.

d) $8 - 2x^2 = 0$: $x = \pm 2$. $A = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\,dx = \frac{64}{3}$ FE.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Bei drei Schnittstellen wechselt die obere Funktion. Man integriert die Differenz auf jedem Teilintervall getrennt und addiert die Beträge. Das Integral über das ganze Intervall heben sich bei symmetrischen Funktionen gegenseitig auf.

a) Schnittstellen $-1, 0, 1$. Auf $[-1;0]$ gilt $f \geq g$ mit Inhalt $\frac{1}{4}$, auf $[0;1]$ gilt $g \geq f$ mit Inhalt $\frac{1}{4}$. $A = \frac{1}{2}$ FE; das Gesamtintegral $\int_{-1}^{1}(f-g)\,dx = 0$ wäre falsch.
b) $x^2(x^2-1) = 0$: $-1, 0, 1$. Die Differenz $x^2 - x^4$ ist auf $[-1;1]$ nichtnegativ.
$A = 2\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}$ FE.

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Zuerst wird die Tangente im Punkt P mit der Ableitung aufgestellt. Die Fläche zwischen Parabel, Tangente und y-Achse erstreckt sich von $x = 0$ bis zum Berührpunkt. Integriert wird die Differenz zwischen Parabel und Tangente.

a) $f'(2) = 4$, $t(x) = 4x - 4$.
b) $x^2 - (4x - 4) = (x-2)^2 \geq 0$.
c) $A = \int_0^2 (x-2)^2\,dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$ FE.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Die Spannweite ergibt sich aus den Nullstellen des Bogens. Der Querschnitt ist die Fläche unter dem Bogen. Multipliziert man sie mit der Brückenbreite, erhält man das Betonvolumen, und mit der Dichte die Masse.

a) $5 - 0{,}05x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$; die Spannweite beträgt 20 m.
b) $A = 2\int_0^{10}(5 - 0{,}05x^2)\,dx = 2\left[5x - \frac{x^3}{60}\right]_0^{10} = 2\left(50 - \frac{50}{3}\right) = \frac{200}{3} \approx 66{,}7\,\mathrm{m}^2$.
c) $V = \frac{200}{3} \cdot 8 = \frac{1600}{3} \approx 533{,}3\,\mathrm{m}^3$.
d) $m \approx 533{,}3 \cdot 2{,}4 \approx 1280$ t.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: Der Teichquerschnitt liegt unterhalb der x-Achse; das Integral ist negativ, die Fläche sein Betrag. Mit der Länge des Teichs wird aus der Querschnittsfläche das Wasservolumen. Liter erhält man durch Umrechnen von Kubikmetern.

a) $A = \int_{-2}^{2}(1 - 0{,}25x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67\,\mathrm{m}^2$.
b) $V = \frac{8}{3} \cdot 6 = 16\,\mathrm{m}^3 = 16\,000$ Liter.
c) $\frac{16\,000}{40} = 400$ min, also etwa $6{,}7$ Stunden.
d) Oberfläche $4 \cdot 6 = 24\,\mathrm{m}^2$; Anteil $\frac{5}{24} \approx 20{,}8\,\%$.

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: Die Breite des Fensters folgt aus den Nullstellen. Die Glasfläche ist das Integral der Parabel zwischen ihnen. Mit dem Preis pro Quadratmeter berechnet man die Kosten; ein Vergleich mit einem Rechteck zeigt den Anteil der Parabelfläche.

a) $2 - 0{,}5x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$; Breite 4 m.

b) $A = \int_{-2}^{2} (2 - 0{,}5x^2)\,dx = 2\left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 2\left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3} \approx 5{,}33\,\mathrm{m}^2$.

c) \frac{16}{3}\cdot180=960\,€.

d) Das Rechteck hat $4 \cdot 2 = 8\,\mathrm{m}^2$; Anteil $\frac{16/3}{8} = \frac{2}{3} \approx 67\,\%$. Das entspricht dem Satz des Archimedes (zwei Drittel des umschriebenen Rechtecks).

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Das Grundstück wird als Fläche zwischen den Begrenzungslinien beschrieben. Nach Bestimmung der Grenzen wird integriert. Weil eine Längeneinheit 10 m entspricht, entspricht eine Flächeneinheit $100\,\mathrm{m}^2$; damit wird in reale Größen umgerechnet.

a) $-0{,}05x^2 + 0{,}5x = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 10$.

b) $A = \int_0^{10} (0{,}5x - 0{,}05x^2)\,dx = \left[0{,}25x^2 - \frac{x^3}{60}\right]_0^{10} = 25 - \frac{50}{3} = \frac{25}{3} \approx 8{,}33$ FE.

c) Eine FE sind $10 \cdot 10 = 100\,\mathrm{m}^2$: $A \approx 833\,\mathrm{m}^2$.

d) 833{,}3\cdot85\approx708\,333\,€.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Die Tunnelbreite ergibt sich aus den Nullstellen des Bogens. Der Querschnitt ist das Integral über diese Breite. Für die Durchfahrtshöhe eines Fahrzeugs prüft man die Funktionswerte an den Seiten des Fahrzeugs.

a) $4 - \frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow x = \pm 4$; Breite 8 m.

b) $A = 2\left[4x - \frac{x^3}{12}\right]_0^4 = 2\left(16 - \frac{16}{3}\right) = \frac{64}{3} \approx 21{,}3\,\mathrm{m}^2$.

c) Der Lkw reicht bis $x = \pm 1{,}25$. Dort ist $f(1{,}25) = 4 - 0{,}39 = 3{,}61$ m $> 3{,}5$ m. Er passt (mit nur 11 cm Spielraum).

d) $V = \frac{64}{3} \cdot 800 \approx 17\,067\,\mathrm{m}^3$.

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: Für eine unbegrenzte Fläche berechnet man zuerst das Integral bis zu einer variablen Grenze b und bildet dann den Grenzwert für $b \to \infty$. Existiert er, hat die Fläche einen endlichen Inhalt, sonst ist sie unendlich groß.

a) $\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^b = \lim\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2}\right) = \frac{1}{2}$.

b) $\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^b = \frac{1}{2}$.

c) $\lim_{b\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^b = \lim(2\sqrt{b}-2) = \infty$: divergent, die Fläche ist unendlich groß.
d) $\lim_{b\to\infty}\ln b = \infty$: divergent.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Die Nullstellen hängen vom Parameter ab und bilden die Integrationsgrenzen. Das Integral liefert den Flächeninhalt als Funktion von a. Eine vorgegebene Fläche führt zu einer Gleichung für den Parameter.

a) $x(a-x)=0 \Rightarrow x=0$ oder $x=a$; dazwischen gilt $f_a>0$.
b) $A=\int_0^a (ax-x^2)\,dx = \frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}=\frac{a^3}{6}$.
c) $\frac{a^3}{6}=36 \Rightarrow a=6$.
d) $\frac{a^3}{6}=4{,}5 \Rightarrow a^3=27 \Rightarrow a=3$.

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Die Gerade $x=k$ halbiert die Fläche, wenn das Integral bis k genau die Hälfte des Gesamtintegrals ist. Daraus entsteht eine Gleichung für k, die man durch Wurzelziehen oder Logarithmieren löst.

a) Gesamtfläche $\frac{8}{3}$, Hälfte $\frac{4}{3}$: $\frac{k^3}{3}=\frac{4}{3} \Rightarrow k=\sqrt[3]{4}\approx 1{,}59$.
b) $\frac{2}{3}b^{3/2}=18 \Rightarrow b^{3/2}=27 \Rightarrow b=9$.
c) Gesamtfläche $\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\frac{32}{3}$. Der Teil oberhalb von $y=c$ hat die Breite $2\sqrt{y}$ in der Höhe y: $\int_c^4 2\sqrt{y}\,dy=\frac{4}{3}\left(8-c^{3/2}\right)=\frac{16}{3} \Rightarrow c^{3/2}=4 \Rightarrow c=4^{2/3}\approx 2{,}52$.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Der Querschnitt des Beckens liegt unter der Wasseroberfläche; sein Betrag ist die Querschnittsfläche. Mit der Beckenlänge entsteht das Volumen, das in Liter umgerechnet wird. Für die halbe Füllung ändern sich Grenzen und obere Begrenzung; der Vergleich der beiden Flächen liefert den Prozentsatz.

a) $A=\int_{-3}^{3}(1{,}8-0{,}2x^2)\,dx = 2\left[1{,}8x-\frac{x^3}{15}\right]_0^3 = 2(5{,}4-1{,}8)=\frac{36}{5}=7{,}2\,\mathrm{m}^2$.
b) $V=7{,}2\cdot 12=86{,}4\,\mathrm{m}^3=86\,400$ Liter.
c) $A_W=\int_{-a}^{a}(0{,}9-0{,}2x^2)\,dx = 2\left(0{,}9a-\frac{0{,}2a^3}{3}\right)$ mit $a=\sqrt{4{,}5}\approx 2{,}121$: $A_W\approx 2{,}55\,\mathrm{m}^2$.
d) Anteil $\frac{2{,}546}{7{,}2}\approx 35{,}4\,\%$, $V_W\approx 30{,}5\,\mathrm{m}^3$. Weniger als die Hälfte, weil das Becken nach unten schmaler wird; die obere Hälfte der Tiefe ist die breitere.

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Der Gewinnzuwachs ist das Integral der Differenz aus Grenzerlös und Grenzkosten. Man bestimmt eine Stammfunktion und setzt die Produktionsgrenzen ein. Wo der Grenzerlös unter die Grenzkosten fällt, lohnt sich Mehrproduktion nicht mehr.

a) $50 - 10 = 40$ und $0{,}05 \cdot 100 + 35 = 40$. Bei $x = -30$ liegt die zweite Lösung außerhalb des Bereichs.
b) $\int_0^{10}(15 - x - 0{,}05x^2)\,dx = \left[15x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{60}\right]_0^{10} = 150 - 50 - \frac{50}{3} = \frac{250}{3} \approx 83{,}3$ Tsd. €.
c) $d(x) = 15 - x - 0{,}05x^2$, $d'(x) = -1 - 0{,}1x$: größte Differenz am Rand $x = 0$ (15 € pro Stück).
d) Nein: Jedes weitere Stück verursacht mehr Kosten als Erlös, der Gesamtgewinn sinkt wieder. Das Gewinnmaximum liegt bei $x = 10$.

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: Das Integral über das symmetrische Intervall ist null, weil sich die gleich großen Flächen ober- und unterhalb aufheben. Für den Flächeninhalt wird an der Nullstelle zerlegt und mit Beträgen gerechnet. Die Punktsymmetrie spart Rechenarbeit.

a) Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung, die Teilflächen sind gleich groß, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen: Integral 0.
b) Jede Teilfläche hat den Inhalt $\frac{1}{4}$, die Gesamtfläche also $\frac{1}{2}$ FE.
c) $\int_1^b (x^3 - x)\,dx = \frac{b^4}{4} - \frac{b^2}{2} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow b^4 - 2b^2 - 8 = 0$. Mit $u = b^2$:
$u^2 - 2u - 8 = 0 \Rightarrow u = 4$, also $b = 2$.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: Die Schnittstellen der Graphen begrenzen das Logo. Integriert wird die Differenz „obere minus untere Funktion“. Weil eine Längeneinheit 20 cm ist, entspricht eine Flächeneinheit $400\,\text{cm}^2$.

a) $x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$, also $x = 0$ und $x = 1$.
b) Auf $[0;1]$ liegt g oberhalb: $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ FE.
c) Eine FE sind $20 \cdot 20 = 400\,\text{cm}^2$: $\frac{1}{3} \cdot 400 \approx 133{,}3\,\text{cm}^2$.
d) *133{,}3\cdot0{,}08\approx10{,}67\,€*.

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Die abgebaute Menge ist das Integral der Abbaurate. Mit der Stammfunktion der Exponentialfunktion erhält man die Menge in einem Zeitraum. Für die Gesamtmenge bildet man den Grenzwert für $t \to \infty$.

a) $\int_0^4 20\mathrm{e}^{-0{,}5t}dt = \left[-40\mathrm{e}^{-0{,}5t}\right]_0^4 = 40(1 - \mathrm{e}^{-2}) \approx 34{,}6$ mg.
b) $\lim_{b\to\infty} 40(1 - \mathrm{e}^{-0{,}5b}) = 40$ mg.
c) $40(1 - \mathrm{e}^{-0{,}5T}) = 36 \Rightarrow \mathrm{e}^{-0{,}5T} = 0{,}1 \Rightarrow T = 2\ln 10 \approx 4{,}61$ h.
d) Die Rate geht exponentiell schnell gegen null, der Beitrag weit entfernter Zeitabschnitte wird beliebig klein.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Das Integral bis b wird allgemein berechnet. Eine Mindestfläche führt zu

einer Ungleichung für b. Der Grenzwert zeigt, dass die Fläche trotz unendlicher Länge endlich bleibt.

a) $\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}$.
b) $1 - \frac{1}{b} \geq 0{,}95 \Rightarrow \frac{1}{b} \leq 0{,}05 \Rightarrow b \geq 20$.
c) Über $[1;\infty)$: $\lim_{b\to\infty}(1 - \frac{1}{b}) = 1$. Über $[\varepsilon;1]$: $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \to \infty$ für $\varepsilon \to 0$, die Fläche über $(0;1]$ ist also unendlich groß.

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: Die Flächeninhaltsfunktion ist das Integral von 0 bis c und damit eine Stammfunktion. Ihre Nullstellen und Extremstellen findet man wie bei jeder Funktion; ihre Ableitung ist die ursprüngliche Funktion.

a) $A(c) = c^3 - 3c^2 = c^2(c-3)$, Nullstellen $c = 0$ (doppelt) und $c = 3$.
b) $A'(c) = f(c) = 3c(c-2) = 0 \Rightarrow c = 2$; $A(2) = -4$. Der Betrag der Fläche zwischen 0 und 2 ist 4 FE.
c) Nullstellen von f: 0 und 2; die Fläche liegt unterhalb der Achse mit Inhalt 4 FE.