Lösungen zur Klassenarbeit - Extremwertprobleme und Optimierung

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Mit der Seite x senkrecht zur Mauer ist die parallele Seite $80 - 2x$; die Fläche als Produkt ist die Zielfunktion, der Definitionsbereich folgt aus der Zaunlänge (zwei BE). Die Ableitung wird null gesetzt, die zweite Ableitung bestätigt das Maximum, danach werden Maße und Fläche angegeben (zwei BE). Kontrolle: $A(20) = 800$ ist größer als $A(19) = 798$ und $A(21) = 798$; das bestätigt das Maximum auch ohne zweite Ableitung.

a) $A(x) = x(80 - 2x)$ mit 0. (2 BE)
b) $A'(x) = 80 - 4x = 0 \Rightarrow x = 20$; Maße $20\,\mathrm{m} \times 40\,\mathrm{m}$, $A = 800\,\mathrm{m}^2$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 2 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Das Volumen ist Grundfläche mal Höhe, also $x(30 - 2x)^2$ (eine BE). Die Ableitung wird mit Produkt- und Kettenregel gebildet und faktorisiert; von den Nullstellen liegt nur eine im Inneren des Definitionsbereichs, die zweite Ableitung bestätigt das Maximum (drei BE). Das maximale Volumen folgt durch Einsetzen (eine BE).

a) $V(x) = x(30 - 2x)^2$, 0. (1 BE)
b) $V'(x) = (30 - 2x)(30 - 6x) = 0 \Rightarrow x = 5$ ($x = 15$ liegt am Rand); $V''(5)$: Maximum. (3 BE)
c) $V(5) = 5 \cdot 20^2 = 2\,000\,\mathrm{cm}^3$. (1 BE)

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die lokalen Extrema im Inneren findet man mit den Nullstellen der Ableitung und der Prüfung ihrer Art (zwei BE). Anschließend werden die Funktionswerte an beiden Intervallrändern berechnet und mit den lokalen Extrema verglichen; der größte Wert ist das globale Maximum, der kleinste das globale Minimum (zwei BE).

a) $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$: Hochpunkt $(1|4)$, Tiefpunkt $(3|0)$. (2 BE)
b) Randwerte $f(0) = 0$, $f(5) = 20$. Globales Maximum 20 bei $x = 5$, globales Minimum 0 bei $x = 0$ und $x = 3$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Der Erlös ist Menge mal Preis; zieht man die Kosten ab, erhält man die Gewinnfunktion (zwei BE). Die Ableitung der Gewinnfunktion wird null gesetzt, die gewinnmaximale Menge in die Preis-Absatz-Funktion eingesetzt und

der maximale Gewinn berechnet; die zweite Ableitung bestätigt das Maximum (drei BE). Kontrolle: Bei $x = 50$ sind Grenzerlös $60 - x = 10$ und Grenzkosten 10 gleich groß, wie es im Gewinnmaximum sein muss.

a) $G(x) = x(60 - 0{,}5x) - 10x - 200 = 50x - 0{,}5x^2 - 200$. (2 BE)
b) $G'(x) = 50 - x = 0 \Rightarrow x = 50$; $p(50) = 35$ Euro; $G(50) = 2500 - 1250 - 200 = 1050$ Euro. (3 BE)

Lösung zu Aufgabe 5 (2 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Mit der Seite x ist die zweite Seite $\frac{U}{2} - x$; die Fläche ist eine nach unten geöffnete Parabel in x. Ihre Ableitung null gesetzt liefert $x = \frac{U}{4}$, und die zweite Seite hat dieselbe Länge. Für Zielfunktion und Nachweis des Quadrats gibt es je eine Bewertungseinheit.

Mit $A(x) = x\left(\frac{U}{2} - x\right)$ und $A'(x) = \frac{U}{2} - 2x = 0$ folgt $x = \frac{U}{4}$; die andere Seite ist $\frac{U}{2} - \frac{U}{4} = \frac{U}{4}$: ein Quadrat; $A'' = -2$. (2 BE)