Lernzettel - Extremwertprobleme und Optimierung

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Einstieg: Der größte Garten mit 60 Metern Zaun

Herr Weber hat 60 Meter Zaun gekauft und möchte damit hinter seinem Haus einen möglichst großen rechteckigen Gemüsegarten abgrenzen. Eine Seite grenzt an die Hauswand, dort braucht er keinen Zaun. Soll der Garten lang und schmal oder eher quadratisch werden? Probieren führt zu Tabellen, die Analysis führt direkt zur besten Lösung: Man schreibt die Fläche als Funktion einer einzigen Seitenlänge und sucht deren Hochpunkt.

Solche Aufgaben heißen Extremwertprobleme oder Optimierungsaufgaben. Sie gehören zu den klassischen Anwendungen der Differenzialrechnung und kommen in jeder Abiturprüfung vor, mal mit Rechtecken und Dosen, mal mit Gewinn und Kosten. Entscheidend ist ein sauberes Vorgehen in festen Schritten und die Kontrolle am Schluss.

Was sind Extremwertprobleme?

Definition: Extremwertproblem

Bei einem **Extremwertproblem** soll eine Größe möglichst groß oder möglichst klein werden: der Flächeninhalt eines Gartens bei festem Zaun, die Oberfläche einer Dose bei festem Volumen, der Gewinn eines Betriebs oder der Abstand zwischen zwei Objekten. Die Analysis liefert dafür ein festes Verfahren, das Sie im Abitur sicher beherrschen müssen. Aufgaben dieser Art erkennen Sie an Formulierungen wie „maximal“, „minimal“, „möglichst groß“, „am günstigsten“ oder „Bestimmen Sie die Maße, für die …“.

Die fünf Schritte

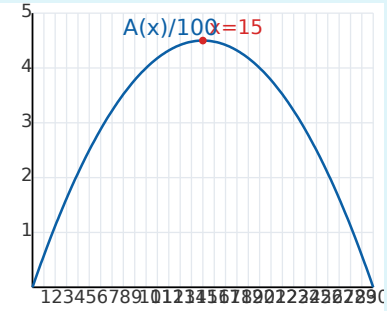
So gehst du vor

1. **Skizze und Variablen:** Zeichnen Sie die Situation und benennen Sie Größen (zum Beispiel a, b, r, h).
2. **Hauptbedingung:** Formel für die zu optimierende Größe, etwa $A = a \cdot b$.
3. **Nebenbedingung:** Gleichung, die die Variablen verbindet (zum Beispiel feste Zaunlänge $2a + b = 60$).
4. **Zielfunktion:** Nebenbedingung nach einer Variablen auflösen und in die Hauptbedingung einsetzen, sodass $Z(x)$ nur noch eine Variable enthält; Definitionsbereich bestimmen.

5. **Extremwert bestimmen:** $Z'(x) = 0$ lösen, mit Z'' oder dem Vorzeichenwechsel prüfen, Randwerte vergleichen und das Ergebnis im Kontext formulieren.

Beispiel 1: Zaun an einer Mauer

Ein rechteckiges Beet grenzt an eine Mauer und soll an den drei übrigen Seiten mit 60 m Zaun eingezäunt werden. Bezeichne x die Länge der beiden Seiten senkrecht zur Mauer. Die Seite parallel zur Mauer ist $60 - 2x$. Zielfunktion:
$A(x) = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$ mit 0. Ableitung $A'(x) = 60 - 4x = 0 \Rightarrow x = 15$,
$A''(x) = -4$: Maximum. Maße: $15\,\text{m} \times 30\,\text{m}$, $A = 450\,\text{m}^2$. Randwerte (nicht im offenen Intervall) liefern $A \to 0$, das Maximum ist also global.



Beispiel 2: Dose mit minimaler Oberfläche

Eine zylindrische Dose soll 1 Liter, also $V = 1000\,\text{cm}^3$, fassen. Hauptbedingung: Oberfläche $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Nebenbedingung: $\pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$. Zielfunktion:
$O(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ mit $r > 0$. Ableitung:
$O'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{500}{\pi} \Rightarrow r \approx 5{,}42$ cm. Mit $O''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0$ liegt ein Minimum vor. Dann ist $h = \frac{1000}{\pi r^2} \approx 10{,}84$ cm $= 2r$. Die optimale Dose ist so hoch wie ihr Durchmesser.

Beispiel 3: Offener Kasten aus Pappe

Aus einem quadratischen Stück Pappe mit der Seitenlänge 24 cm werden an den Ecken Quadrate der Seitenlänge x ausgeschnitten, die Seiten werden hochgebogen. Das Volumen ist $V(x) = x(24 - 2x)^2$ mit 0. Ausmultiplizieren:
$V(x) = 4x^3 - 96x^2 + 576x$,
$V'(x) = 12x^2 - 192x + 576 = 12(x^2 - 16x + 48) = 12(x - 4)(x - 12)$. Im Definitionsbereich bleibt $x = 4$. Vorzeichenwechsel von V' von $+$ nach $-$: Maximum mit $V(4) = 4 \cdot 16^2 = 1024\,\text{cm}^3$.

Beispiel 4: Kürzester Abstand

Gesucht ist der Punkt der Parabel $y = x^2$, der dem Punkt $P(0|2)$ am nächsten liegt. Der Abstand eines Punktes $(x|x^2)$ von P ist $d = \sqrt{x^2 + (x^2 - 2)^2}$. Weil die Wurzelfunktion streng monoton ist, genügt es, das **Abstandsquadrat**

$D(x) = x^2 + (x^2 - 2)^2 = x^4 - 3x^2 + 4$ zu minimieren. Das vermeidet die Kettenregel. Ableitung: $D'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3)$. Kandidaten sind $x = 0$ mit $D = 4$ und $x = \pm\sqrt{1{,}5}$ mit $D = 1{,}75$. Der kleinere Wert gewinnt: Der Abstand beträgt $\sqrt{1{,}75} \approx 1{,}32$. Wichtig ist, am Ende nicht D, sondern $d = \sqrt{D}$ anzugeben.

Satz: Extremwerte in Anwendungen

Hat die Zielfunktion Z auf dem Definitionsbereich D bei x_0 eine Stelle mit $Z'(x_0) = 0$ und $Z''(x_0)$ (bzw. > 0), so liegt ein lokales Maximum (bzw. Minimum) vor.

Plausibilitätskontrolle

Prüfen Sie jedes Ergebnis kurz auf Sinn: Sind die Längen positiv? Stimmt die Nebenbedingung mit den gefundenen Maßen (zum Beispiel $2 \cdot 15 + 30 = 60$)? Ist der Wert größer als bei einem einfachen Vergleichsfall, zum Beispiel einem Quadrat? So erkennen Sie Rechenfehler, bevor Sie abgeben.

Randextrema

Definition: Randwerte

Ist der Definitionsbereich ein abgeschlossenes Intervall $[a; b]$, müssen Sie neben den Extremstellen aus $Z'(x) = 0$ auch die **Randwerte** $Z(a)$ und $Z(b)$ vergleichen. Beispiel: $f(x) = x^3 - 3x$ auf $[-2; 3]$ hat $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Werte: $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(3) = 18$. Das globale Maximum ist 18 am rechten Rand, das globale Minimum ist -2 (an zwei Stellen).

Satz: Randextrema

Ist der Definitionsbereich ein abgeschlossenes Intervall $[a; b]$, so liegt das absolute Maximum bzw. Minimum von Z entweder an einer Stelle mit $Z' = 0$ oder an einem Randpunkt a, b. Vergleichen Sie daher alle Kandidaten.

Gewinn und Kosten

In der Wirtschaft optimiert man Erlös, Kosten und Gewinn. Aus der Preis-Absatz-Funktion $p(x)$ folgt der Erlös $E(x) = x \cdot p(x)$, der Gewinn ist $G(x) = E(x) - K(x)$. Gewinnmaximum: $G'(x) = 0$, also Grenzerlös gleich Grenzkosten. Die Durchschnittskosten $k(x) = \frac{K(x)}{x}$ haben ihr Minimum (Betriebsoptimum) dort, wo $k'(x) = 0$ gilt, also wo die Grenzkosten gleich den Durchschnittskosten sind.

Zielfunktion aufstellen: Variablen wählen

Die Wahl der Variablen entscheidet über die Rechenarbeit. Häufig gibt es mehrere

Möglichkeiten, aber eine Wahl führt zu einer einfacheren Zielfunktion. Wählen Sie die Größe als Variable, mit der sich beide Bedingungen am einfachsten ausdrücken lassen, etwa den Radius r bei Dosen und Kugeln oder die Seitenlänge x des ausgeschnittenen Quadrats bei einer Faltung. Kommen zwei verschiedene Größen vor (zum Beispiel Breite und Höhe), lösen Sie die Nebenbedingung, die linear ist, nach der einen Variablen auf und setzen sie in die Hauptbedingung ein. Notieren Sie den Definitionsbereich: Alle Längen sind positiv, und die Nebenbedingung darf keine negativen Werte erzwingen.

Beispiel 5

Ein Fenster besteht aus einem Rechteck der Breite $2r$ und der Höhe h mit aufgesetztem Halbkreis (Radius r). Der Umfang des Rahmens beträgt 6 m. Wie groß ist die Fensterfläche höchstens?

Nebenbedingung: Umfang $U = 2h + 2r + \pi r = 6$, also $h = 3 - r - \frac{\pi}{2}r$. Hauptbedingung: $A = 2rh + \frac{\pi}{2}r^2$. Einsetzen ergibt die Zielfunktion $A(r) = 6r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi}{2}r^2 = 6r - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)r^2$. Ableiten: $A'(r) = 6 - (4+\pi)r = 0 \Rightarrow r = \frac{6}{4+\pi} \approx 0{,}840$ m. Wegen $A''(r) = -(4+\pi)$ liegt ein Maximum vor. Dann ist $h = 3 - \frac{(2+\pi)\cdot 3}{4+\pi} = \frac{6}{4+\pi} = r$, und die Fläche beträgt $A = 3r \approx 2{,}52\,\mathrm{m}^2$. Die Höhe des Rechtecks ist also genau gleich dem Radius.

Betriebsoptimum und Gewinnmaximum

In der Betriebswirtschaft treten zwei Optima auf, die oft verwechselt werden. Das **Gewinnmaximum** liegt bei der Menge, bei der Grenzerlös und Grenzkosten gleich sind: $E'(x) = K'(x)$. Das **Betriebsoptimum** ist die Menge mit den kleinsten Stückkosten $k(x) = \frac{K(x)}{x}$. Aus $k'(x) = \frac{K'(x)x - K(x)}{x^2} = 0$ folgt $K'(x) = \frac{K(x)}{x}$: Im Betriebsoptimum sind die Grenzkosten gleich den Stückkosten. Dieser Zusammenhang dient als bequeme Kontrolle für die Rechnung.

Beispiel 6

Die Gesamtkosten eines Betriebs sind $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$ (in Tausend Euro, x in Tausend Stück). Bestimmen Sie das Betriebsoptimum.

Stückkosten: $k(x) = x^2 - 6x + 15 + \frac{32}{x}$. Ableitung: $k'(x) = 2x - 6 - \frac{32}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 6x^2 - 32 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 16 = 0$. Die Lösung $x = 4$ erkennt man durch Probieren: $64 - 48 - 16 = 0$. Dort gilt $k(4) = 16 - 24 + 15 + 8 = 15$ und $K'(4) = 3 \cdot 16 - 48 + 15 = 15$; Grenzkosten und Stückkosten stimmen überein. Das Betriebsoptimum liegt also bei $4\,000$ Stück mit Stückkosten von *15*\,€.

Abstandsprobleme

Gesucht ist hier der Punkt einer Kurve mit dem kleinsten Abstand zu einem gegebenen Punkt oder einer Geraden. Der Abstand enthält eine Wurzel; das Abstandsquadrat hat dieselbe Minimalstelle und ist ein Polynom. Bei geradenförmigen Nebenbedingungen kann das Ergebnis auch geometrisch geprüft werden: Der nächste Punkt ist der Fußpunkt des

Lotes.

Beispiel 7

Welcher Punkt der Geraden $y = -2x + 6$ liegt dem Ursprung am nächsten?

Abstandsquadrat: $D(x) = x^2 + (6 - 2x)^2 = 5x^2 - 24x + 36$. Aus $D'(x) = 10x - 24 = 0$ folgt $x = 2{,}4$, also $y = 1{,}2$. Der Abstand beträgt $\sqrt{5{,}76 + 1{,}44} = \sqrt{7{,}2} \approx 2{,}68$.

Kontrolle: Das Lot vom Ursprung auf die Gerade hat die Steigung $\frac{1}{2}$; der Punkt $(2{,}4|1{,}2)$ liegt tatsächlich auf der Ursprungsgeraden $y = \frac{1}{2}x$.

Optimierung mit Parameter

Manche Aufgaben geben eine Größe nicht als Zahl, sondern als Buchstaben vor, etwa die Zaunlänge L. Das Ergebnis lässt sich dann als Formel angeben und für beliebige Zahlen auswerten. Bei der Mauer-Aufgabe mit L Metern Zaun ist $A(x) = x(L - 2x)$, das Maximum liegt bei $x = \frac{L}{4}$ mit $A_{\max} = \frac{L^2}{8}$. Die Seite parallel zur Mauer ist dann doppelt so lang wie die beiden anderen: $L - 2x = \frac{L}{2} = 2x$.

Wusstest du? Didos Problem

Nach einer antiken Sage durfte die Königin Dido so viel Land für Karthago beanspruchen, wie sie mit einer Stierhaut umspannen konnte. Sie schnitt die Haut in feine Streifen und legte sie zu einem Halbkreis am Meer aus. Die Aufgabe, bei gegebenem Umfang die größte Fläche einzuschließen, heißt seitdem isoperimetrisches Problem. Die Lösung ist der Kreis, und mit einer Küstenlinie als Begrenzung der Halbkreis. Beim Rechteck ist es das Quadrat bzw. an der Mauer das Rechteck mit der doppelten Seite.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Strategie: Skizze, Hauptbedingung (zu optimierende Größe), Nebenbedingung, Zielfunktion $Z(x)$ mit nur einer Variablen, Definitionsbereich aus dem Sachzusammenhang.
- Extremstellen im Inneren: $Z'(x_0) = 0$ und $Z''(x_0) \neq 0$ (oder Vorzeichenwechsel von Z'); $Z'' < 0$ gibt ein Maximum, $Z'' > 0$ ein Minimum.
- Bei abgeschlossenem Definitionsbereich $[a; b]$ müssen zusätzlich die Randwerte $Z(a)$ und $Z(b)$ verglichen werden.
- Abstandsprobleme minimiert man über das Abstandsquadrat; die Wurzel ändert die Lage des Minimums nicht.
- Wirtschaft: Gewinnmaximum bei Grenzerlös gleich Grenzkosten; Betriebsoptimum (minimale Stückkosten) dort, wo Grenzkosten gleich Stückkosten sind.
- Am Ende nicht nur x, sondern alle gefragten Größen (Fläche, Volumen, Gewinn) berechnen und mit einem Antwortsatz samt Einheit angeben.
- Plausibilitätskontrolle: Nebenbedingung einsetzen, Vergleichsfall (zum Beispiel Quadrat) prüfen, Ergebnis im Definitionsbereich?

- Bei Parametern (Zaunlänge L, Volumen V) das Ergebnis allgemein herleiten; dann lassen sich Zahlenwerte einsetzen.

Achtung: Typische Fehler

- Die Zielfunktion enthält noch zwei Variablen, weil die Nebenbedingung nicht eingesetzt wurde.
- Definitionsbereich vergessen, zum Beispiel eine negative Länge als Lösung angeben.
- Nur die Stelle x angeben, aber nicht den eigentlich gesuchten Wert (Fläche, Volumen) oder die anderen Maße.
- Randwerte nicht geprüft und nur aus $Z' = 0$ auf das globale Maximum geschlossen.
- Kein Antwortsatz mit Einheit.

Ottos Tipp: Frage dich immer: „Welche Größe soll extrem werden, und welche Größe ist fest vorgegeben?“ Dann findest du Haupt- und Nebenbedingung fast von allein!

Ottos Tipp

Schreiben Sie am Ende immer einen Antwortsatz mit Einheit und prüfen Sie, ob das Ergebnis im Definitionsbereich liegt. Ein „Zaun von minus drei Metern“ fällt Prüfern sofort auf.