Arbeitsblatt - Extremwertprobleme und Optimierung

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Das Rechteck mit festem Umfang

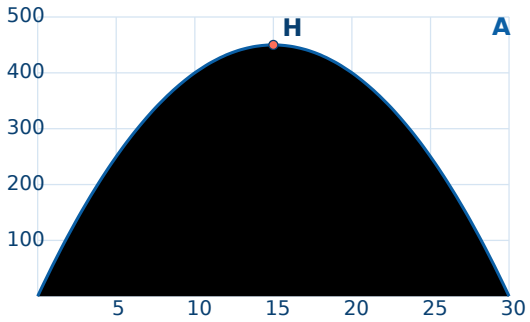
Ein Rechteck hat den Umfang 40 cm.

a) Stellen Sie die Zielfunktion für den Flächeninhalt auf und geben Sie den Definitionsbereich an.
b) Bestimmen Sie die Seitenlängen, für die der Flächeninhalt maximal wird.
c) Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Das Gehege an der Mauer

Ein Landwirt will ein rechteckiges Gehege an einer Stallwand mit 60 m Zaun einzäunen. Die Stallwand ersetzt eine Zaunseite.



a) Stellen Sie die Zielfunktion $A(x)$ auf (Seite senkrecht zur Wand: x).
b) Bestimmen Sie die Maße des größten Geheges.
c) Wie groß ist die Fläche, und wie viel mehr als bei einem quadratischen Gehege (Seite 20 m)?

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Zwei Gehege nebeneinander

Zwei gleich große rechteckige Gehege liegen nebeneinander und teilen sich eine Zwischenwand. Insgesamt stehen 120 m Zaun zur Verfügung (keine Mauer).

a) Skizzieren Sie die Anordnung. Wie viele Zaunstücke senkrecht und waagerecht gibt es?

b) Stellen Sie die Zielfunktion für die Gesamtfläche auf.
c) Bestimmen Sie die Maße und die maximale Gesamtfläche.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Dose mit kleinster Oberfläche

Eine zylindrische Dose soll 1 Liter ($1\,000\,\text{cm}^3$) fassen. Die Materialmenge soll minimal sein.

a) Stellen Sie die Zielfunktion $O(r)$ auf.
b) Bestimmen Sie Radius und Höhe für minimale Oberfläche.
c) Wie groß ist die minimale Oberfläche? Welcher Zusammenhang besteht zwischen h und r?

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Offener Kasten aus Pappe

Aus einem quadratischen Pappstück der Seitenlänge 24 cm werden an den Ecken Quadrate der Seitenlänge x ausgeschnitten; die Seiten werden hochgeklappt.

a) Stellen Sie die Zielfunktion $V(x)$ auf und geben Sie den Definitionsbereich an.
b) Bestimmen Sie x für maximales Volumen.
c) Berechnen Sie das maximale Volumen und die Abmessungen des Kastens.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Kürzester Abstand zur Parabel

Gesucht ist der Punkt der Parabel $y = x^2$, der dem Punkt $P(0|2)$ am nächsten liegt.

a) Stellen Sie das Abstandsquadrat $D(x)$ auf.
b) Bestimmen Sie die Minimalstellen.
c) Wie groß ist der kleinste Abstand?

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Randextrema

Gegeben ist $f(x) = x^3 - 3x$ auf dem Intervall $[-2; 3]$.

a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema im Inneren.
b) Berechnen Sie die Randwerte.
c) Geben Sie das globale Maximum und Minimum an.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Das Normfenster

Ein Fenster besteht aus einem Rechteck (Breite $2r$, Höhe h) mit aufgesetztem

Halbkreis. Der Rahmenumfang beträgt 6 m.

a) Stellen Sie die Nebenbedingung auf.
b) Stellen Sie die Zielfunktion $A(r)$ auf.
c) Bestimmen Sie r, h und die maximale Fläche.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Der Preis macht den Gewinn

Ein Händler verkauft ein Gerät. Die Preis-Absatz-Funktion lautet $p(x) = 100 - 0{,}5x$ (in Euro, x Stück), die Kosten sind $K(x) = 20x + 500$.

a) Stellen Sie die Gewinnfunktion $G(x)$ auf.
b) Bestimmen Sie die gewinnmaximale Menge und den Preis.
c) Wie hoch ist der maximale Gewinn?
d) Bis zu welcher Menge macht der Händler überhaupt Gewinn?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Betriebsoptimum

Die Gesamtkosten betragen $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$ (in Tausend Euro, x in Tausend Stück).

a) Stellen Sie die Stückkostenfunktion $k(x)$ auf.
b) Bestimmen Sie die Menge mit den geringsten Stückkosten.
c) Zeigen Sie, dass dort die Grenzkosten gleich den Stückkosten sind.

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Das Seekabel

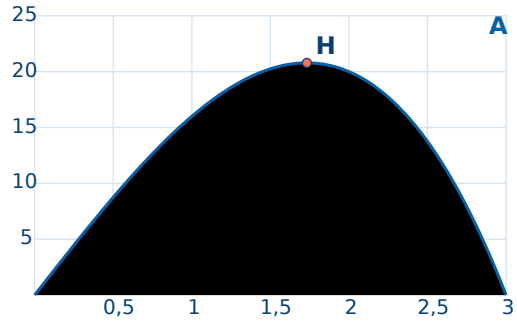
Ein Fluss ist 100 m breit. Ein Kabel soll von Punkt A am einen Ufer zu Punkt B am anderen Ufer verlegt werden, wobei B 300 m flussabwärts liegt. Unter Wasser kostet das Kabel *120*\,€ pro Meter, an Land *80*\,€ pro Meter. Das Kabel quert den Fluss schräg bis zum Punkt C, der x Meter flussabwärts von A liegt, und verläuft dann am Ufer zu B.

a) Stellen Sie die Kostenfunktion $K(x)$ auf.
b) Bestimmen Sie die günstigste Stelle x.
c) Berechnen Sie die minimalen Kosten und vergleichen Sie mit dem Kabel, das direkt von A nach B unter Wasser verlegt wird.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Rechteck unter der Parabel

Dem Graphen von $f(x) = 9 - x^2$ wird ein Rechteck einbeschrieben, dessen Seiten parallel zu den Achsen sind und dessen obere Ecken auf dem Graphen liegen.



a) Stellen Sie die Flächenfunktion $A(x)$ für die Hälfte der Breite x auf.
b) Bestimmen Sie die Abmessungen des Rechtecks mit größtem Flächeninhalt.
c) Wie groß ist die maximale Fläche?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Zylinder in der Kugel

In eine Kugel mit Radius $R = 10$ cm wird ein Zylinder (Höhe h, Radius r) einbeschrieben.

a) Zeigen Sie: $r^2 = 100 - \frac{h^2}{4}$.
b) Stellen Sie die Zielfunktion $V(h)$ auf.
c) Bestimmen Sie die Maße des Zylinders mit größtem Volumen.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Die Obstplantage

Auf einem Hektar stehen 50 Apfelbäume, die je 800 kg Äpfel tragen. Jeder zusätzlich gepflanzte Baum verringert den Ertrag aller Bäume um je 10 kg.

a) Stellen Sie den Gesamtertrag $E(n)$ bei n zusätzlichen Bäumen auf.
b) Bestimmen Sie die ertragreichste Baumzahl.
c) Wie hoch ist der maximale Ertrag, und wie viel mehr als ohne zusätzliche Bäume?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Dose mit unterschiedlichen Materialkosten

Eine Konservendose mit $500\,\text{cm}^3$ Inhalt hat einen Mantel, der $0{,}4$ Cent pro cm^2 kostet, sowie Boden und Deckel zu $0{,}8$ Cent pro cm^2.

a) Stellen Sie die Kostenfunktion $K(r)$ in Cent auf.
b) Bestimmen Sie r und h für minimale Kosten.
c) Berechnen Sie die minimalen Kosten.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Das Rechteck unter der Glockenkurve

Gegeben ist $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Ein Rechteck mit der Grundseite auf der x-Achse hat seine oberen Ecken auf dem Graphen und ist symmetrisch zur y-Achse.

a) Stellen Sie die Flächenfunktion $A(x)$ für $x > 0$ (halbe Breite) auf.
b) Bestimmen Sie x für den größten Flächeninhalt.
c) Wie groß ist die maximale Fläche?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Der nächste Punkt der Geraden

Welcher Punkt der Geraden $y = -2x + 6$ liegt dem Ursprung am nächsten?

a) Stellen Sie das Abstandsquadrat auf.
b) Bestimmen Sie die Minimalstelle.
c) Berechnen Sie den Abstand und überprüfen Sie ihn mit der Abstandsformel Punkt–Gerade.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Der Kanal mit größtem Querschnitt

Ein rechteckiger Kanal wird aus einem 12 m langen Blechstreifen geformt (Boden und beide Seitenwände, oben offen).

a) Stellen Sie die Zielfunktion für den Querschnitt auf (Höhe h).
b) Bestimmen Sie Breite und Höhe für den größten Querschnitt.
c) Wie groß ist er, und welches Seitenverhältnis ergibt sich?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Zaun an der Mauer – allgemein

Ein Rechteck grenzt an eine Mauer und wird an den drei freien Seiten mit L Metern Zaun begrenzt.

a) Zeigen Sie: Die maximale Fläche beträgt $A_{\max} = \frac{L^2}{8}$ bei $x = \frac{L}{4}$.
b) Wie groß muss L sein, damit $A_{\max} = 800\,\mathrm{m}^2$ gilt?
c) Wie ändert sich $A_{\max}$, wenn man L verdoppelt?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Die Tangente an 1/x

Die Tangente an den Graphen von $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ im Punkt [redacted] schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in Abhängigkeit von a.
b) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte der Tangente.
c) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks für alle a gleich 2 ist.