Lösungen - Extremwertprobleme und Optimierung

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsweg: Bei festem Umfang hängt die zweite Seite von der ersten ab; diese Nebenbedingung setzt man in die Flächenformel ein und erhält eine Zielfunktion mit einer Variablen. Ihr Maximum findet man mit der Ableitung, die zweite Ableitung bestätigt die Art des Extremums.

a) Mit der Breite x ist die Länge $20 - x$: $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$, 0.
b) $A'(x) = 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$, $A''(x) = -2$: Maximum bei 10 cm $\times$ 10 cm (Quadrat).
c) $A = 100\,\text{cm}^2$.

Lösung zu Aufgabe 2

Lösungsweg: Die Mauer ersetzt eine Seite, daher teilen sich nur drei Seiten den Zaun. Mit der Seite x senkrecht zur Wand ist die parallele Seite $60 - 2x$. Die Fläche wird als Funktion von x maximiert und am Ende mit einem Quadrat verglichen.

a) Die Seite parallel zur Wand ist $60 - 2x$: $A(x) = x(60 - 2x)$, 0.
b) $A'(x) = 60 - 4x = 0 \Rightarrow x = 15$, $A'' = -4$: Maße 15 m $\times$ 30 m.
c) $A = 15 \cdot 30 = 450\,\text{m}^2$. Quadrat mit Seite 20 m: nur $400\,\text{m}^2$, also gewinnt man $50\,\text{m}^2$.

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg: Zuerst wird gezählt, wie oft jede Seitenlänge im Zaun vorkommt; daraus folgt die Nebenbedingung. Nach dem Auflösen einer Variablen entsteht die Zielfunktion der Gesamtfläche. Das Maximum ergibt sich mit der Ableitung.

a) Es gibt drei senkrechte Zäune (der Länge x) und zwei waagerechte (der Länge y): $3x + 2y = 120$.
b) $y = 60 - 1{,}5x$; $A(x) = x(60 - 1{,}5x)$, 0.
c) $A'(x) = 60 - 3x = 0 \Rightarrow x = 20$, $y = 30$. $A = 600\,\text{m}^2$.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsweg: Das Volumen ist vorgegeben und liefert die Höhe in Abhängigkeit vom Radius. Setzt man sie in die Oberflächenformel ein, hängt die Zielfunktion nur noch von r ab. Das Minimum findet man mit der Ableitung; es ergibt eine Dose mit $h = 2r$.

a) $h = \frac{1000}{\pi r^2}$; $O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$, $r > 0$.
b) $O'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{500}{\pi} \Rightarrow r \approx 5{,}42$ cm; $h \approx 10{,}84$ cm. Wegen $O'' > 0$ ein Minimum.
c) $O \approx 553{,}6\,\text{cm}^2$. Es gilt $h = 2r$: Die Dose ist so hoch wie breit.

Lösung zu Aufgabe 5

Lösungsweg: Der Kasten hat die Grundfläche $(24-2x)^2$ und die Höhe x. Das Volumen als Produkt ist die Zielfunktion, ihr Definitionsbereich ergibt sich aus der Pappgröße. Die Nullstellen der Ableitung werden auf ihre Lage im Definitionsbereich geprüft.

a) $V(x) = x(24-2x)^2$, 0.
b) $V'(x) = (24-2x)^2 - 4x(24-2x) = (24-2x)(24-6x) = 0 \Rightarrow x = 4$ ($x = 12$ liegt am Rand). $V''(4)$
c) $V(4) = 4 \cdot 16^2 = 1\,024\,\text{cm}^3$; Kasten $16\,\text{cm} \times 16\,\text{cm} \times 4\,\text{cm}$.

Lösung zu Aufgabe 6

Lösungsweg: Statt des Abstands minimiert man das Abstandsquadrat, weil die Wurzel die Lage des Minimums nicht ändert. Ein Punkt der Parabel hat die Koordinaten $(x|x^2)$. Die Ableitung des Abstandsquadrats liefert die Minimalstellen, die Wurzel den Abstand.

a) $D(x) = x^2 + (x^2-2)^2 = x^4 - 3x^2 + 4$.
b) $D'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{1{,}5}$. $D(0) = 4$, $D(\pm\sqrt{1{,}5}) = 2{,}25 - 4{,}5 + 4 = 1{,}75$: Minimum bei $x = \pm\sqrt{1{,}5} \approx \pm 1{,}22$, bei $x = 0$ liegt ein lokales Maximum.
c) $d = \sqrt{1{,}75} \approx 1{,}323$.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg: Auf einem abgeschlossenen Intervall können globale Extrema im Inneren oder am Rand liegen. Man bestimmt die lokalen Extrema mit der Ableitung, berechnet die Randwerte und vergleicht alle Kandidaten. Der größte und der kleinste Wert sind die globalen Extrema.

a) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$; $f(-1) = 2$ (Hochpunkt), $f(1) = -2$ (Tiefpunkt).
b) $f(-2) = -8 + 6 = -2$; $f(3) = 27 - 9 = 18$.
c) Globales Maximum 18 am Rand $x = 3$; globales Minimum -2 an den Stellen $x = -2$ und $x = 1$.

Lösung zu Aufgabe 8

Lösungsweg: Der Umfang besteht aus zwei Höhen, der unteren Breite und dem Halbkreisbogen; das ist die Nebenbedingung. Die Fläche setzt sich aus Rechteck und Halbkreis zusammen. Nach Einsetzen von h wird $A(r)$ maximiert.

a) $2h + 2r + \pi r = 6 \Rightarrow h = 3 - r - \frac{\pi}{2}r$.
b) $A = 2rh + \frac{\pi}{2}r^2 = 6r - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)r^2$.
c) $A'(r) = 6 - (4+\pi)r = 0 \Rightarrow r = \frac{6}{4+\pi} \approx 0{,}840$ m; $h = r$; $A = 3r \approx 2{,}52\,\text{m}^2$.

Lösung zu Aufgabe 9

Lösungsweg: Der Erlös ist Menge mal Preis, der Gewinn Erlös minus Kosten. Das Gewinnmaximum folgt aus der Ableitung der Gewinnfunktion. Die Gewinnzone wird durch die Nullstellen der Gewinnfunktion begrenzt.

a) $E(x) = x\,p(x) = 100x - 0{,}5x^2$; $G(x) = 80x - 0{,}5x^2 - 500$.
b) $G'(x) = 80 - x = 0 \Rightarrow x = 80$; $p(80) = 60$ Euro; $G'' = -1$
c) $G(80) = 6\,400 - 3\,200 - 500 = 2\,700$ Euro.
d) $G(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 160x + 1000 = 0 \Rightarrow x = 80 \pm \sqrt{5400} \approx 6{,}5$ bis $153{,}5$ Stück.

Lösung zu Aufgabe 10

Lösungsweg: Die Stückkosten sind die Gesamtkosten geteilt durch die Menge. Ihr Minimum, das Betriebsoptimum, findet man mit der Ableitung; die entstehende Gleichung dritten Grades wird durch Probieren gelöst. Zur Kontrolle vergleicht man Grenzkosten und Stückkosten.

a) $k(x) = x^2 - 6x + 15 + \frac{32}{x}$.
b) $k'(x) = 2x - 6 - \frac{32}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = 4$ (Probe: $64 - 48 - 16 = 0$); $k(4) = 15$
c) $K'(x) = 3x^2 - 12x + 15$, $K'(4) = 48 - 48 + 15 = 15 = k(4)$.

Lösung zu Aufgabe 11

Lösungsweg: Die Kosten setzen sich aus dem schrägen Kabel unter Wasser und dem Kabel an Land zusammen. Die Länge unter Wasser folgt aus dem Satz des Pythagoras. Das Minimum der Kostenfunktion wird mit der Ableitung bestimmt und mit der direkten Verlegung verglichen.

a) Unter Wasser: $\sqrt{x^2 + 100^2}$, an Land $300 - x$: $K(x) = 120\sqrt{x^2 + 10\,000} + 80(300 - x)$, $0 \le x \le 300$.
b) $K'(x) = \frac{120x}{\sqrt{x^2+10\,000}} - 80 = 0 \Rightarrow 3x = 2\sqrt{x^2 + 10\,000} \Rightarrow 5x^2 = 40\,000 \Rightarrow x = \sqrt{8000} \approx 89{,}4$ m.
c) *K\approx32\,944\,€*. Direkt unter Wasser: *120\sqrt{300^2+100^2}\approx37\,947\,€* – mehr als doppelt so teuer.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösungsweg: Die halbe Breite ist x, die Höhe der Funktionswert $f(x)$. Die Fläche des symmetrischen Rechtecks ist daher $2x\,f(x)$. Ihr Maximum ergibt sich mit der Ableitung im sinnvollen Bereich zwischen den Nullstellen.

a) Breite $2x$, Höhe $9 - x^2$: $A(x) = 2x(9 - x^2) = 18x - 2x^3$, 0.
b) $A'(x) = 18 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3} \approx 1{,}73$; Breite $2\sqrt{3} \approx 3{,}46$, Höhe 6.
c) $A = 12\sqrt{3} \approx 20{,}78$ FE.

Lösung zu Aufgabe 13

Lösungsweg: Im Achsenschnitt bilden Zylinderradius, halbe Höhe und Kugelradius ein rechtwinkliges Dreieck. Diese Pythagoras-Beziehung ist die Nebenbedingung. Nach Einsetzen hängt das Volumen nur noch von h ab und wird maximiert.

a) Pythagoras im Achsenschnitt: $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 = 100$.

b) $V(h) = \pi r^2 h = \pi\left(100h - \frac{h^3}{4}\right)$, 0.

c) $V'(h) = \pi\left(100 - \frac{3}{4}h^2\right) = 0 \Rightarrow h = \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 11{,}55$ cm; $r^2 = 100 - \frac{100}{3}$, $r \approx 8{,}16$ cm; $V \approx 2418\,\text{cm}^3$.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg: Mit n zusätzlichen Bäumen steigt die Baumzahl, der Ertrag pro Baum sinkt. Der Gesamtertrag ist das Produkt beider Größen, eine nach unten geöffnete Parabel. Ihr Scheitel liefert die beste Baumzahl.

a) $E(n) = (50+n)(800-10n) = 40\,000 + 300n - 10n^2$.
b) $E'(n) = 300 - 20n = 0 \Rightarrow n = 15$, also 65 Bäume.
c) $E(15) = 65 \cdot 650 = 42\,250$ kg; ohne Zusatz $40\,000$ kg, also $2\,250$ kg mehr.

Lösung zu Aufgabe 15

Lösungsweg: Boden und Deckel kosten mehr als der Mantel; die Kosten werden deshalb mit verschiedenen Preisen gewichtet. Die Höhe ersetzt man mit dem vorgegebenen Volumen. Das Minimum der Kostenfunktion liefert eine Dose, die niedriger ist als die Dose mit kleinster Oberfläche.

a) $h = \frac{500}{\pi r^2}$; $K(r) = 0{,}8 \cdot 2\pi r^2 + 0{,}4 \cdot 2\pi r h = 1{,}6\pi r^2 + \frac{400}{r}$.
b) $K'(r) = 3{,}2\pi r - \frac{400}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{400}{3{,}2\pi} \Rightarrow r \approx 3{,}41$ cm; $h \approx 13{,}66$ cm.
c) $K \approx 175{,}8$ Cent.

Lösung zu Aufgabe 16

Lösungsweg: Die halbe Breite des Rechtecks ist x, die Höhe der Funktionswert der Glockenkurve. Die Ableitung der Flächenfunktion entsteht mit Produkt- und Kettenregel. Ihre Nullstelle liefert das größte Rechteck.

a) Breite $2x$, Höhe e^{-x^2}: $A(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

b) $A'(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$; Vorzeichenwechsel $+ \to -$: Maximum.

c) $A = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2} \approx 0{,}858$ FE.

Lösung zu Aufgabe 17

Lösungsweg: Ein Punkt der Geraden wird allgemein mit x beschrieben. Das

Abstandsquadrat zum Ursprung ist eine quadratische Funktion, deren Scheitel die Minimalstelle ist. Zur Kontrolle wird geprüft, dass die Verbindung zum Ursprung senkrecht auf der Geraden steht.

a) $D(x) = x^2 + (6 - 2x)^2 = 5x^2 - 24x + 36$.
b) $D'(x) = 10x - 24 = 0 \Rightarrow x = 2{,}4$, $y = 1{,}2$
c) $d = \sqrt{7{,}2} \approx 2{,}683$. Formel: $\frac{|6|}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \approx 2{,}683$.

Lösung zu Aufgabe 18

Lösungsweg: Der Blechstreifen bildet Boden und zwei Seitenwände; daraus folgt die Breite in Abhängigkeit von der Höhe. Der Querschnitt als Produkt von Breite und Höhe ist eine Parabel. Ihr Scheitel liefert die günstigsten Maße.

a) Breite $b = 12 - 2h$: $A(h) = h(12 - 2h)$, 0.
b) $A'(h) = 12 - 4h = 0 \Rightarrow h = 3$, $b = 6$
c) $A = 18\,\mathrm{m}^2$; die Breite ist doppelt so groß wie die Höhe.

Lösung zu Aufgabe 19

Lösungsweg: Hier wird die Aufgabe mit dem Parameter L allgemein gelöst. Die Zielfunktion hängt von x und L ab, abgeleitet wird nur nach x. Das Ergebnis ist eine Formel, in die man beliebige Zaunlängen einsetzen kann.

a) $A(x) = x(L - 2x)$; $A'(x) = L - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{4}$; $A = \frac{L}{4} \cdot \frac{L}{2} = \frac{L^2}{8}$.
b) $\frac{L^2}{8} = 800 \Rightarrow L = 80$ m.
c) Die Fläche vervierfacht sich, denn $A_{\max}$ wächst quadratisch mit L.

Lösung zu Aufgabe 20

Lösungsweg: Die Tangente wird mit der Steigung $f'(a)$ im Punkt P aufgestellt. Ihre Achsenschnittpunkte erhält man durch Nullsetzen von x bzw. y. Die Dreiecksfläche ergibt sich als halbes Produkt der Achsenabschnitte und hängt überraschenderweise nicht von a ab.

a) $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$: $y = -\frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$.
b) y-Achse: $\frac{2}{a}$; x-Achse: $y = 0 \Rightarrow x = 2a$.
c) $A = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{a} = 2$, unabhängig von a: Es gibt hier keinen Extremwert, die Zielfunktion ist konstant.