Lösungen zur Klassenarbeit - Exponential- und Logarithmusfunktionen

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (5 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Bei a) wird $z = \mathrm{e}^x$ substituiert; die quadratische Gleichung wird gelöst, und aus beiden positiven Lösungen folgt x durch Logarithmieren (drei BE). Bei b) wendet man die Exponentialfunktion auf beide Seiten an und prüft die Definitionsmenge (eine BE). Bei c) begründet man, dass e^x immer positiv ist (eine BE).

a) Mit $z = \mathrm{e}^x$: $z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow z = 1$ oder $z = 4$; $x = 0$ oder $x = \ln 4$. (3 BE)
b) $x - 1 = \mathrm{e}^2 \Rightarrow x = 1 + \mathrm{e}^2 \approx 8{,}39$. (1 BE)
c) Keine Lösung, da $\mathrm{e}^x > 0$. (1 BE)

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Für die Nullstelle wird e^x ausgeklammert; da dieser Faktor nie null ist, bleibt eine einfache Exponentialgleichung (zwei BE). Für den Tiefpunkt wird die Ableitung mit der Kettenregel gebildet, null gesetzt und die Art des Extremums mit der zweiten Ableitung oder dem Vorzeichenwechsel geprüft (zwei BE).

a) $\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 4) = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4 \approx 1{,}39$. (2 BE)
b) $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 2) = 0 \Rightarrow x = \ln 2$; Vorzeichenwechsel $- \to +$; $f(\ln 2) = 4 - 8 = -4$: $T(\ln 2 \mid -4)$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Die Verdopplungszeit folgt aus $\mathrm{e}^{0{,}04t} = 2$ durch Logarithmieren (zwei BE). Für den Zeitpunkt, an dem der Bestand $2\,000$ erreicht, wird die Gleichung durch 500 geteilt und ebenfalls logarithmiert; das Ergebnis ist genau die doppelte Verdopplungszeit, was als Kontrolle dient (zwei BE). Kontrolle: $2\,000$ ist das Vierfache von 500, also nach zwei Verdopplungszeiten, etwa $34{,}7$ Jahren. Häufig wird fälschlich mit dem Zehnerlogarithmus gerechnet.

a) $T_2 = \frac{\ln 2}{0{,}04} \approx 17{,}3$ Jahre. (2 BE)
b) $\mathrm{e}^{0{,}04t} = 4 \Rightarrow t = \frac{\ln 4}{0{,}04} \approx 34{,}7$ Jahre (zwei Verdopplungszeiten). (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Bei a) bildet man die Stammfunktion $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$, setzt die Grenzen ein und vereinfacht mit $\mathrm{e}^{\ln 2} = 2$ (zwei BE). Bei b) wird das Integral bis zu einer Grenze b berechnet und dann der Grenzwert für $b \to \infty$ gebildet; der Exponentialterm verschwindet dabei (zwei BE). Zwischenschritte: In a) ergibt sich $(2 - 0{,}5) - (1 - 1) = 1{,}5$; b) liefert 1, denn $3\mathrm{e}^{-3x}$ ist eine Dichtefunktion. Häufig fehlt das Minuszeichen in der Stammfunktion von e^{-x}.

a) $\left[\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right]_{0}^{\ln 2}=\left(2-\frac{1}{2}\right)-0=\frac{3}{2}$. (2 BE)
b) $\lim_{b\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-3x}\right]_{0}^{b}=\lim(1-\mathrm{e}^{-3b})=1$. (2 BE)

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

Lösungsweg und Bewertung: Man setzt die Temperaturfunktion gleich 40, subtrahiert die Raumtemperatur und teilt durch 60, sodass der Exponentialterm allein steht (eine BE). Logarithmieren und Auflösen nach t liefert den Zeitpunkt (eine BE). Ein Antwortsatz mit Einheit und gerundetem Ergebnis schließt die Aufgabe ab (eine BE). Zwischenschritt: $60\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}=20\Rightarrow \mathrm{e}^{-0{,}1t}=\frac{1}{3}\Rightarrow t=10\ln 3\approx 11$ Minuten. Kontrolle: Der Temperaturunterschied zum Raum ist dann auf ein Drittel gesunken.

$60\mathrm{e}^{-0{,}1t}=20\Rightarrow \mathrm{e}^{-0{,}1t}=\frac{1}{3}\Rightarrow t=10\ln 3\approx 11{,}0$ min. (3 BE)