Lernzettel - Exponential- und Logarithmusfunktionen

Klasse: Qualifikationsphase Abitur

Einstieg: Zinsen, die jede Sekunde gutgeschrieben werden

Eine Bank schreibt Zinsen nicht einmal im Jahr gut, sondern immer häufiger: monatlich, täglich, stündlich. Bei 100 Prozent Jahreszins wächst ein Euro bei n Zinsperioden auf $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, und diese Zahl strebt für $n \to \infty$ nicht gegen unendlich, sondern gegen die Eulersche Zahl $\mathrm{e} \approx 2{,}71828$. Die Zahl e beschreibt also das Ergebnis eines Wachstums, das in jedem Augenblick proportional zum Bestand erfolgt. Genau diese Eigenschaft macht die e-Funktion zum Standardmodell für Wachstum, Zerfall, Abkühlung und Abbau von Medikamenten.

In diesem Kapitel lernen Sie, mit der e-Funktion und ihrer Umkehrung, dem natürlichen Logarithmus, sicher umzugehen: Gleichungen lösen, Terme umformen, ableiten und integrieren, Funktionen diskutieren und Wachstumsprozesse modellieren.

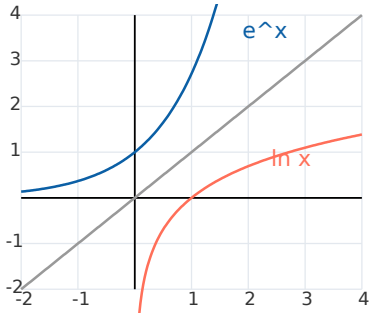
Die e-Funktion

Die Exponentialfunktion zur Basis $\mathrm{e} \approx 2{,}71828$ (Eulersche Zahl) ist die wichtigste Funktion der Analysis, denn sie ist ihre eigene Ableitung: $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$. Ihr Graph verläuft oberhalb der x-Achse ($\mathrm{e}^x > 0$ für alle x), schneidet die y-Achse bei $(0|1)$ und ist streng monoton wachsend. Es gilt $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$; die negative x-Achse ist waagerechte Asymptote. Wegen $\mathrm{e}^x > 0$ kann man bei $f'(x) = 0$-Gleichungen den Faktor e^x stets kürzen. Potenzgesetze gelten wie gewohnt: $\mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$, $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{ab}$.

Die natürliche Logarithmusfunktion

Definition: Logarithmusfunktion

Die **Logarithmusfunktion** $\ln x$ ist die Umkehrfunktion der e-Funktion. Sie ist nur für $x > 0$ definiert, hat die Nullstelle $x = 1$ und ist streng monoton wachsend (aber sehr langsam). Ihr Graph entsteht durch Spiegelung des e-Graphen an der Geraden $y = x$. Es gilt $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ und $\mathrm{e}^{\ln x} = x$. Die Ableitung lautet $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; die y-Achse ist senkrechte Asymptote.



Logarithmengesetze

- $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^r) = r \cdot \ln a$
- $\ln 1 = 0$, $\ln \mathrm{e} = 1$

Beispiele: $\ln 8 - \ln 2 = \ln 4$, $2 \ln 3 + \ln \frac{1}{9} = \ln 9 + \ln \frac{1}{9} = \ln 1 = 0$ und $\ln(\mathrm{e}^5) - \ln(\mathrm{e}^2) = 3$.

Satz: Logarithmengesetze

Für $u, v > 0$ gilt $\ln(uv) = \ln u + \ln v$, $\ln \dfrac{u}{v} = \ln u - \ln v$ und $\ln(u^r) = r \ln u$. Außerdem ist $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ und $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ für $x > 0$.

Gleichungen lösen

Definition: Substitution

Für $c > 0$ gilt $\mathrm{e}^{ax} = c \Rightarrow x = \frac{\ln c}{a}$. Zum Beispiel $\mathrm{e}^{2x} = 5 \Rightarrow 2x = \ln 5 \Rightarrow x = \frac{\ln 5}{2} \approx 0{,}80$. Umgekehrt $\ln(x - 1) = 2 \Rightarrow x - 1 = \mathrm{e}^2 \Rightarrow x = 1 + \mathrm{e}^2 \approx 8{,}39$. Quadratische Gleichungen in e^x löst man durch **Substitution** $z = \mathrm{e}^x$: $\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x + 2 = 0$ wird zu $z^2 - 3z + 2 = 0$ mit $z = 1$ oder $z = 2$, also $x = 0$ oder $x = \ln 2$. Bei Logarithmusgleichungen am Schluss die Definitionsmenge prüfen: Ergebnisse mit $x \leq 0$ in $\ln x$ sind unzulässig.

So gehst du vor: Exponential- und Logarithmusgleichungen

1. Den Term mit e^x bzw. $\ln x$ isolieren.
2. Anwenden der Umkehrfunktion: $\ln$ auf beiden Seiten bzw. $\mathrm{e}^{\cdots}$ auf beiden Seiten.
3. Bei quadratischen Termen in e^x substituieren: $z = \mathrm{e}^x > 0$.
4. Lösungen im Definitionsbereich prüfen.

Ableiten und Integrieren

Mit der Kettenregel gilt $(\mathrm{e}^{kx})' = k\,\mathrm{e}^{kx}$ und $(\ln(g(x)))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$. Stammfunktionen:

$\int \mathrm{e}^{kx}\,dx = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$, $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$, $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$ (Probe mit der Produktregel: $(x\ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$). Beispiel: $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^{\mathrm{e}} = (\mathrm{e} - \mathrm{e}) - (0 - 1) = 1$.

Satz: Ableitung und Stammfunktion

$(\mathrm{e}^{kx})' = k\,\mathrm{e}^{kx}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ für $x > 0$; eine Stammfunktion von e^{kx} ist $\dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$, von $\dfrac{1}{x}$ ist $\ln|x|$.

Wachstum und Zerfall

Definition: Verdopplungszeit

Exponentielles Wachstum wird durch $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{kt}$ modelliert; $k > 0$ beschreibt Wachstum, k Zerfall. Die Änderungsrate ist proportional zum Bestand: $N'(t) = k\,N(t)$. Die **Verdopplungszeit** ist $T_2 = \frac{\ln 2}{k}$; die **Halbwertszeit** beim Zerfall $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{|k|}$. Beispiel: Bei $N(t) = 200\,\mathrm{e}^{0{,}03t}$ ist $T_2 = \frac{\ln 2}{0{,}03} \approx 23{,}1$ Zeiteinheiten.

Kurvendiskussion mit der e-Funktion

Definition: Definitionsmenge

Wir untersuchen $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ vollständig. **Definitionsmenge:** alle reellen Zahlen. **Nullstelle:** $x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ gilt nur für $x = 0$, denn $\mathrm{e}^{-x} > 0$. **Verhalten im Unendlichen:** Für $x \to \infty$ gewinnt die e-Funktion gegen jede Potenz, deshalb $f(x) \to 0$; für $x \to -\infty$ geht $f(x) \to -\infty$. Die x-Achse ist also nach rechts waagerechte Asymptote. **Ableitungen:** $f'(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{-x}$ und $f''(x) = (x - 2)\mathrm{e}^{-x}$. **Extremum:** $f'(x) = 0$ liefert $x = 1$ mit $f''(1) = -\mathrm{e}^{-1}$, also Hochpunkt $H(1|\mathrm{e}^{-1}) \approx H(1|0{,}37)$. **Wendepunkt:** $f''(x) = 0$ liefert $x = 2$, also $W(2|2\mathrm{e}^{-2}) \approx W(2|0{,}27)$. Aus diesen Angaben lässt sich der Graph skizzieren: Er steigt bis $x = 1$, fällt dann langsam gegen null und ist rechts von $x = 2$ nach oben gekrümmt.

Verschieben, Strecken und Spiegeln

Für $f(x) = a\,\mathrm{e}^{b(x-c)} + d$ gilt: a streckt den Graphen in y-Richtung (negativ: Spiegelung an der x-Achse), b streckt in x-Richtung (negativ: Spiegelung an der y-Achse), c verschiebt nach rechts und d nach oben. Die waagerechte Asymptote liegt bei $y = d$. Zum Beispiel hat $f(x) = 3 - 2\mathrm{e}^{-x}$ die Asymptote $y = 3$ und die Nullstelle bei $\mathrm{e}^{-x} = \frac{3}{2}$, also $x = -\ln\frac{3}{2} \approx -0{,}41$.

Wachstumsvergleich

Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenzfunktion: $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \infty$ für jedes n.

Umgekehrt wächst $\ln x$ langsamer als jede Wurzel: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$. Mit dieser Faustregel bestimmt man Grenzwerte von Produkten wie $x^2\mathrm{e}^{-x}\to 0$ oder $x\ln x\to 0$ für $x\to 0^+$, ohne lange Rechnung. Im Abitur schreibt man dazu: „Die e-Funktion dominiert die Potenzfunktion."

Begrenztes Wachstum und Abkühlung

Viele Vorgänge nähern sich einem Grenzwert G: $B(t)=G-(G-B_0)\mathrm{e}^{-kt}$. Der Bestand wächst zunächst schnell, dann immer langsamer. Ein Beispiel ist das Abkühlen eines Getränks nach $T(t)=20+60\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$: Die Umgebungstemperatur 20 °C ist die Asymptote, die Anfangstemperatur beträgt $T(0)=80$ °C. Wann sind 40 °C erreicht? Aus $60\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}=20$ folgt $t=10\ln 3\approx 11$ Minuten. Die momentane Änderungsrate $T'(t)=-6\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ ist negativ und wird betragsmäßig kleiner.

Weitere Beispiele

Beispiel 1: Gleichung

Lösen Sie $2\mathrm{e}^{x}-6=0$.

$\mathrm{e}^{x}=3$, also $x=\ln 3\approx 1{,}10$.

Beispiel 2: Substitution

Lösen Sie $\mathrm{e}^{2x}-5\mathrm{e}^{x}+4=0$.

Mit $z=\mathrm{e}^{x}$: $z^2-5z+4=0$, also $z=1$ oder $z=4$. Rücksubstitution: $x=0$ oder $x=\ln 4$.

Beispiel 3: Ableiten und Tangente

Bestimmen Sie die Tangente an $f(x)=x\,\mathrm{e}^{x}$ bei $x=0$.

Produktregel: $f'(x)=\mathrm{e}^{x}+x\mathrm{e}^{x}$. $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Tangente: $t(x)=x$.

Exponentialfunktionen zu beliebiger Basis

Jede Exponentialfunktion a^x mit $a>0$ lässt sich als e-Funktion schreiben: $a^x=\mathrm{e}^{x\ln a}$. Daraus folgt sofort die Ableitung $(a^x)'=\ln a\cdot a^x$. In Abituraufgaben wird die Basis e bevorzugt, deshalb sollten Sie Terme wie 2^x oder $0{,}9^t$ umschreiben können. Bei einem Wachstumsfaktor von $1{,}03$ pro Jahr ist $k=\ln 1{,}03\approx 0{,}0296$, und die stetige Verzinsung mit $k=0{,}03$ ergibt einen effektiven Jahreszins von $\mathrm{e}^{0{,}03}-1\approx 3{,}045\,\%$.

Beispiel 4

Ein Guthaben von *2\,000\,€* wird stetig mit $3\,\%$ verzinst, $K(t)=2000\,\mathrm{e}^{0{,}03t}$. Wann hat es sich verdoppelt, und wie hoch ist es nach 10 Jahren?

Aus $\mathrm{e}^{0{,}03t} = 2$ folgt $t = \frac{\ln 2}{0{,}03} \approx 23{,}1$ Jahre. Nach zehn Jahren sind es *K(10)=2000\,\mathrm{e}^{0{,}3}\approx2\,699{,}72\,€*. Bei jährlicher Verzinsung wären es nur *2000\cdot1{,}03^{10}\approx2\,687{,}83\,€*.

Die Definitionsmenge bei Logarithmen

Der Logarithmus ist nur für positive Argumente definiert. Bei jeder Gleichung mit $\ln$ bestimmen Sie deshalb zuerst die Definitionsmenge und prüfen am Ende, ob die gefundenen Lösungen dazu passen. Besonders tückisch sind Gleichungen, in denen die Logarithmengesetze die Definitionsmenge verändern: Aus $\ln(x(x-2))$ wird $\ln x + \ln(x-2)$, und die zweite Schreibweise erlaubt nur $x > 2$, die erste dagegen auch x.

Beispiel 5

Lösen Sie $\ln x + \ln(x-2) = \ln 3$.

Definitionsmenge: $x > 2$. Mit dem Logarithmengesetz folgt $\ln\big(x(x-2)\big) = \ln 3$, also $x^2 - 2x = 3$ und $x^2 - 2x - 3 = 0$ mit den Lösungen $x = 3$ und $x = -1$. Wegen $x > 2$ ist nur $x = 3$ zulässig. Probe: $\ln 3 + \ln 1 = \ln 3$.

Altersbestimmung mit der Halbwertszeit

Das radioaktive Kohlenstoffisotop $^{14}\mathrm{C}$ zerfällt mit der Halbwertszeit $T = 5\,730$ Jahre. Der Zerfallsfaktor ist $k = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1{,}21 \cdot 10^{-4}$ pro Jahr. Nach t Jahren ist noch der Anteil e^{-kt} vorhanden. Aus dem gemessenen Restanteil p berechnet man das Alter durch $t = -\frac{\ln p}{k}$. Diese Methode wird zur Datierung von Holz, Knochen und Textilien benutzt.

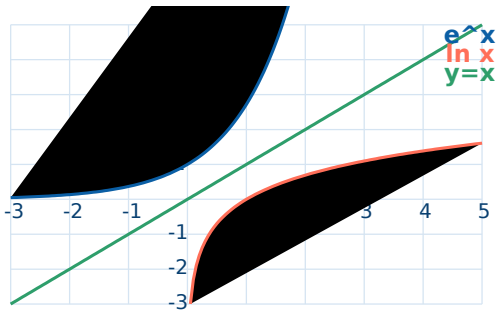
Beispiel 6

In einem Holzbalken sind noch $70\,\%$ des ursprünglichen $^{14}\mathrm{C}$ vorhanden. Wie alt ist er?

Aus $\mathrm{e}^{-kt} = 0{,}7$ folgt $t = \frac{-\ln 0{,}7}{k} = \frac{0{,}3567}{1{,}21\cdot10^{-4}} \approx 2\,948$ Jahre. Kontrolle: Nach einer Halbwertszeit wären $50\,\%$ übrig; $70\,\%$ liegen darüber, also muss das Alter kleiner als $5\,730$ Jahre sein.

Graph und Umkehrfunktion

Der Graph von $\ln x$ entsteht aus dem Graphen von e^x durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$. Beide Graphen sind in der Abbildung dargestellt; der Punkt $(0|1)$ der e-Funktion wird auf $(1|0)$ gespiegelt, die waagerechte Asymptote $y = 0$ der e-Funktion wird zur senkrechten Asymptote $x = 0$ des Logarithmus. Tangenten spiegeln sich entsprechend: Die Tangente an e^x in $(0|1)$ hat die Steigung 1, die Tangente an $\ln x$ in $(1|0)$ ebenfalls.



Kurvendiskussion: Ein vollständiges Beispiel mit Parameter

Bei Funktionen mit Exponentialterm lohnt es sich, den Faktor $\mathrm{e}^{g(x)}$ früh auszuklammern. Dann hängen Nullstellen, Vorzeichen und Monotonie nur noch vom Restfaktor ab.

Beispiel 7

Untersuchen Sie $f(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$ auf Nullstellen, Extremstellen und Verhalten im Unendlichen.

Nullstelle: $(x-1)\mathrm{e}^{-x} = 0$ nur für $x = 1$. Für $x \to \infty$ gewinnt die e-Funktion: $f(x) \to 0$; für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$. Ableitung mit der Produktregel: $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x-1)\mathrm{e}^{-x} = (2-x)\mathrm{e}^{-x}$. Sie verschwindet bei $x = 2$ und wechselt dort von Plus nach Minus: Hochpunkt $\underline{\qquad\qquad}$. Die zweite Ableitung $f''(x) = (x-3)\mathrm{e}^{-x}$ bestätigt den Hochpunkt ($f''(2)$) und liefert den Wendepunkt bei $x = 3$ mit $f(3) = 2\mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}0996$.

Wusstest du? Euler und die Zahl e

Die Zahl e taucht erstmals 1683 bei Jakob Bernoulli auf, der den Grenzwert $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bei der Zinseszinsrechnung untersuchte. Leonhard Euler führte 1731 den Buchstaben e ein und berechnete ihre Dezimalstellen. Sie ist eine irrationale, sogar transzendente Zahl, genau wie π. Die schönste Formel, in der beide vorkommen, ist die Eulersche Identität $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$.

Exponential- und Logarithmusfunktion als Paar

Die natürliche Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus sind Umkehrfunktionen voneinander. Ihre Graphen liegen spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden $y = x$. Was die eine Funktion bewirkt, macht die andere rückgängig: $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ für alle x und $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ für $x > 0$. Deshalb löst man Exponentialgleichungen mit dem Logarithmus und Logarithmusgleichungen mit der Exponentialfunktion. Aus der Spiegelung folgen auch die Eigenschaften: Die e-Funktion hat die waagerechte Asymptote $y = 0$ und ist überall positiv, der Logarithmus hat die senkrechte Asymptote $x = 0$ und ist nur für positive Zahlen definiert.

Auch die Ableitungen passen zusammen: Die e-Funktion ist ihre eigene Ableitung, die Ableitung des Logarithmus ist $\frac{1}{x}$. Beim Logarithmus wird die Steigung also immer kleiner,

je weiter man nach rechts geht, während sie bei der e-Funktion immer größer wird. Wer sich diese Gegensätze an den beiden Graphen klarmacht, kann viele Aufgaben schon vor der Rechnung abschätzen und Fehler leichter erkennen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Die e-Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ ist positiv, streng monoton wachsend und ihre eigene Ableitung; $\mathrm{e} \approx 2{,}718$ und $\mathrm{e}^x > 0$ für alle x.
- Die ln-Funktion ist die Umkehrfunktion: $\ln(\mathrm{e}^x) = x$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ für $x > 0$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; der Graph entsteht durch Spiegelung an $y = x$.
- Logarithmengesetze: $\ln(uv) = \ln u + \ln v$, $\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$, $\ln(u^r) = r \ln u$; eine Summe $\ln(a + b)$ lässt sich nicht aufspalten.
- Gleichungen: $\mathrm{e}^{ax} = c \Rightarrow x = \frac{\ln c}{a}$ (nur für $c > 0$); bei quadratischen Termen substituieren Sie $z = \mathrm{e}^x > 0$; bei $\ln$-Gleichungen die Definitionsmenge prüfen.
- Ableiten und Integrieren: $(\mathrm{e}^{kx})' = k\mathrm{e}^{kx}$, $(\ln g(x))' = \frac{g'}{g}$, $\int \mathrm{e}^{kx} dx = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$, $\int \ln x \, dx = x \ln x - x$.
- Exponentielles Wachstum $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{kt}$: $N' = kN$, Verdopplungszeit $\frac{\ln 2}{k}$, Halbwertszeit $\frac{\ln 2}{|k|}$; begrenztes Wachstum $B(t) = G - (G - B_0)\mathrm{e}^{-kt}$.
- Wachstumsvergleich: e^x wächst schneller als jede Potenz, $\ln x$ langsamer als jede Wurzel; daraus folgen $x^n \mathrm{e}^{-x} \to 0$ und $x \ln x \to 0$ für $x \to 0^+$.
- Transformationen von $a\,\mathrm{e}^{b(x-c)} + d$: d legt die waagerechte Asymptote fest, c verschiebt, a und b strecken oder spiegeln.

Achtung: Typische Fehler

- $\ln(a + b)$ wie $\ln a + \ln b$ behandeln: Das gilt nur für Produkte.
- Bei $\ln$-Gleichungen die Definitionsmenge vergessen.
- Die innere Ableitung bei $(\mathrm{e}^{kx})'$ vergessen.
- $\int \frac{1}{x} dx$ mit der Potenzregel versuchen.
- Bei Zerfall das Vorzeichen von k falsch setzen.

Ottos Tipp: Wenn eine Gleichung e^x enthält, hilft fast immer „logarithmieren“. Bei $\ln x$ hilft „e hoch“. Beides sind Umkehrungen füreinander!

Ottos Tipp

Bei jeder e-Funktion gilt: $\mathrm{e}^x > 0$. Wer das im Kopf behält, erkennt sofort, dass Gleichungen wie $\mathrm{e}^x = -2$ keine Lösung haben, und spart sich lange Rechnungen.