Arbeitsblatt - Exponential- und Logarithmusfunktionen

Klasse: Qualifikationsphase Abitur · 21

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Exponentialgleichungen lösen

Lösen Sie die Gleichungen nach x und runden Sie auf zwei Nachkommastellen. Prüfen Sie, ob eine Gleichung keine Lösung besitzt.

a) $\mathrm{e}^{2x} = 5$
b) $3\mathrm{e}^{x} - 6 = 0$
c) $\mathrm{e}^{-x} = 0{,}2$
d) $\mathrm{e}^{x} = -2$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Logarithmusgleichungen lösen

Bestimmen Sie zuerst die Definitionsmenge und lösen Sie dann.

a) $\ln(x-1) = 2$
b) $\ln(2x+1) = 0$
c) $\ln x + \ln(x-2) = \ln 3$
d) $2\ln x = \ln 16$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Logarithmengesetze

Vereinfachen Sie ohne Taschenrechner.

a) $\ln 8 - \ln 2$
b) $2\ln 3 + \ln \frac{1}{9}$
c) $\frac{1}{2}\ln 16 + \ln 5$
d) $\mathrm{e}^{\ln 7 - \ln 2}$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Gleichungen mit Substitution

Substituieren Sie $z = \mathrm{e}^{x}$ und denken Sie daran, dass $z > 0$ gelten muss.

a) $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4 = 0$
b) $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 6 = 0$

c) $\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} = 2{,}5$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Ableitungen

Bilden Sie die Ableitung.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{3x-1}$
b) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$
c) $f(x) = x^2 \ln x$ für $x > 0$
d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1 + \mathrm{e}^{x}}$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Integrale

Berechnen Sie die Integrale exakt.

a) $\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,dx$
b) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,dx$
c) $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,dx$
d) $\int_0^{\ln 2} \left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) dx$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Verdopplungs- und Halbwertszeit

Berechnen Sie die gesuchten Zeiten.

a) Eine Bakterienkultur wächst nach $N(t) = 200\,\mathrm{e}^{0{,}03t}$ (t in Stunden). Bestimmen Sie die Verdopplungszeit.
b) Iod-131 hat die Halbwertszeit 8 Tage. Bestimmen Sie die Zerfallskonstante k.
c) Wie viel Prozent von Iod-131 sind nach 30 Tagen noch vorhanden?
d) Nach wie vielen Tagen sind nur noch $1\,\%$ vorhanden?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Die Abkühlung

Ein Getränk kühlt nach $T(t) = 20 + 60\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ (in $^\circ\mathrm{C}$, t in Minuten) ab.

a) Wie warm ist es zu Beginn? Gegen welchen Wert strebt die Temperatur?
b) Wann sind $40\,^\circ\mathrm{C}$ erreicht?
c) Bestimmen Sie die Abkühlungsgeschwindigkeit bei $t = 0$ und bei $t = 10$.
d) Nach wie vielen Minuten ist der Unterschied zur Umgebung auf die Hälfte gesunken?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Stetige Verzinsung

Ein Guthaben von *2\,000\,€* wird stetig mit $3\,\%$ verzinst: $K(t) = 2000\,\mathrm{e}^{0{,}03t}$.

a) Berechnen Sie das Guthaben nach 10 Jahren.
b) Vergleichen Sie mit jährlicher Verzinsung von $3\,\%$.
c) Wie groß ist der effektive Jahreszins der stetigen Verzinsung?
d) Wann ist das Guthaben auf *5\,000\,€* angewachsen?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Altersbestimmung mit C-14

Die Halbwertszeit von $^{14}\mathrm{C}$ beträgt $5\,730$ Jahre.

a) Bestimmen Sie die Zerfallskonstante k.
b) In einem Holzfund sind noch $70\,\%$ des $^{14}\mathrm{C}$ vorhanden. Wie alt ist er?
c) Nach wie vielen Jahren sind noch $25\,\%$ vorhanden?
d) Warum eignet sich die Methode nicht für Funde, die nur 100 Jahre alt sind?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Der Luftdruck

Der Luftdruck nimmt mit der Höhe nach $p(h) = 1013\,\mathrm{e}^{-h/8000}$ (in hPa, h in Metern) ab.

a) Wie groß ist der Druck auf dem Gipfel des Mount Everest ($8\,849$ m)?
b) In welcher Höhe herrscht der halbe Druck?
c) Um wie viel Prozent sinkt der Druck pro $1\,000$ m Höhenzunahme?
d) Wie hoch ist der Druck in Frankfurt (100 m) und in Garmisch (700 m)?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Verschieben, strecken, spiegeln

Gegeben ist $f(x) = 3 - 2\,\mathrm{e}^{-x}$.

a) Geben Sie die waagerechte Asymptote an und begründen Sie sie.
b) Berechnen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse und die Nullstelle.
c) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.
d) Geben Sie die Wertemenge an.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Wachstumsvergleich

Bestimmen Sie die Grenzwerte und begründen Sie mit der Faustregel „die e-Funktion gewinnt“.

a) $\lim_{x \to \infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}$

b) $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$
c) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
d) $\lim_{x \to \infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^{10}}$

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Tangente und Normale

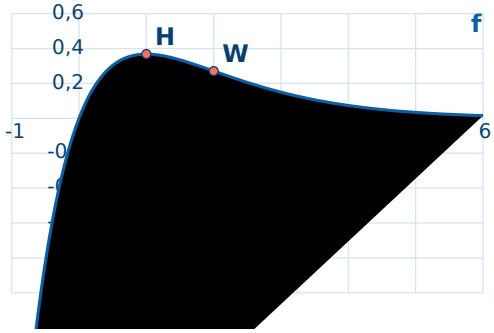
Gegeben ist $f(x) = \ln x$ und der Punkt $P(\mathrm{e}|1)$.

a) Zeigen Sie, dass P auf dem Graphen liegt, und bestimmen Sie die Tangente in P.
b) Zeigen Sie, dass die Tangente durch den Ursprung geht.
c) Bestimmen Sie die Normale in P und ihren Schnittpunkt mit der x-Achse.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Kurvendiskussion von x·e^(−x)

Gegeben ist $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ (siehe Abbildung).



a) Bestimmen Sie die Nullstelle und das Verhalten im Unendlichen.
b) Bestimmen Sie f', f'' und die Extrempunkte.
c) Bestimmen Sie den Wendepunkt.
d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen Graph, x-Achse und der Geraden $x = 1$.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Die Funktion x − ln x

Gegeben ist $g(x) = x - \ln x$ für $x > 0$.

a) Bestimmen Sie g' und das Extremum.
b) Zeigen Sie, dass g konvex ist.
c) Bestimmen Sie die Grenzwerte für $x \to 0^+$ und $x \to \infty$ und die Wertemenge.
d) Bestimmen Sie die Tangente in $x = \mathrm{e}$.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Mehrfache Medikamentengabe

Ein Medikament baut sich im Blut nach $c(t) = c_0\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ ab (t in Stunden). Alle 6 Stunden wird eine Dosis gegeben, die die Konzentration jeweils um c_0 erhöht.

a) Welcher Anteil einer Dosis ist nach 6 Stunden noch vorhanden?
b) Wie hoch ist die Konzentration unmittelbar nach der 2. und 3. Dosis (in Vielfachen von c_0)?
c) Welche Konzentration strebt unmittelbar nach einer Gabe gegen einen Grenzwert, und wie groß ist er?
d) Wann ist die Konzentration einer einzelnen Dosis auf $10\,\%$ gesunken?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Begrenztes Wachstum: die Lernkurve

Der Lernerfolg eines Schülers beim Vokabeltraining wird durch $B(t) = 100 - 90\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ (Anzahl gelernter Vokabeln von 100, t in Tagen) beschrieben.

a) Wie viele Vokabeln kann er zu Beginn? Gegen welchen Wert strebt B?
b) Bestimmen Sie die Lernrate $B'(t)$ und ihren Wert zu Beginn.
c) Wann kennt er 80 Vokabeln?
d) Nach wie vielen Tagen hat sich die Lernrate halbiert?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Eine Schar mit Ortskurve

Gegeben ist die Schar $f_a(x) = \mathrm{e}^{x} - a x$ mit $a > 0$.

a) Bestimmen Sie f_a' und den Tiefpunkt T_a in Abhängigkeit von a.
b) Bestimmen Sie die Ortskurve der Tiefpunkte.
c) Für welches a berührt der Graph die x-Achse?
d) Für welche a hat f_a zwei Nullstellen?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Fläche zwischen e^x und e^(−x)

Die Graphen von $f(x) = \mathrm{e}^{x}$ und $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ schneiden sich im Punkt $S(0|1)$.

a) Zeigen Sie, dass sie sich nur in S schneiden.
b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen und der Geraden $x = 1$.
c) Berechnen Sie $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ und deuten Sie das Ergebnis.

Aufgabe 21

Aufgabe 21 – Wahr oder falsch?

Entscheiden Sie und begründen Sie.

a) $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$ für alle $a, b > 0$.

b) $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{a} \cdot \mathrm{e}^{b}$ für alle a, b.
c) Die Gleichung $\mathrm{e}^{x} = x^{2}$ hat keine Lösung.
d) Der Graph von $\ln x$ hat eine waagerechte Asymptote.